
GEOMETRÍA
ANALÍTICA
para Ciencias e Ingenierías
Silvia RAICHMAN – Eduardo TOTTER

Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías

Raichman , Silvia Raquel
Geometría analítica para ciencias e ingenierías / Silvia Raquel Raichman ; Eduardo Totter. - 1a ed ilustrada. - Mendoza : Universidad Nacional de Cuyo, 2016.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-575-125-5

1. Geometría Analítica. I. Totter, Eduardo II. Título
CDD 512.140711

Mendoza, República Argentina, Febrero de 2016.



Geometría Analítica
para Ciencias e Ingenierías

EDICIÓN DIGITAL

Silvia Raquel Raichman - Eduardo Totter

Silvia Raquel Raichman
Ingeniera civil, Magister en Ingeniería Estructural y Especialista en Docencia Universitaria.
Profesora Titular de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Matemática Avanzada*.
Facultad de Ingeniería – Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Cuyo.
Profesora Titular de la asignatura *Cálculo Avanzado*, Departamento de Ingeniería Civil.
Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional.

Eduardo Totter
Ingeniero civil, Magister en Ingeniería Estructural.
Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica*, *Matemática Avanzada* y *Construcciones Metálicas y de Madera*.
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.
Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Cálculo Avanzado*, Departamento de Ingeniería Civil.
Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional.

Índice general

Capítulo 1. Espacios Vectoriales y Vectores geométricos

Capítulo 2. Planos y rectas

Capítulo 3. Secciones Cónicas

Prólogo a la primera edición

Durante siglos, la geometría y el álgebra se fueron desarrollando como disciplinas matemáticas diferentes. El filósofo y matemático francés René Descartes, publicó en el año 1637 su tratado *La Géométrie* en el que introdujo un método para unir esas dos ramas de la matemática, llamado *Geometría Analítica*, basado en el uso de sistemas coordenados, por medio de los cuales, los procesos algebraicos se pueden aplicar al estudio de la geometría.

La *Geometría Analítica* permite hallar y estudiar los lugares geométricos de forma sistemática y general. Provee de métodos para transformar los problemas geométricos en problemas algebraicos, resolverlos analíticamente e interpretar geométricamente los resultados.

Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías, es un texto cuyo principal objetivo es acompañar el proceso de enseñanza y aprendizaje de un curso de *Geometría Analítica* de nivel universitario de grado, promoviendo en el estudiante el desarrollo de habilidades de observación, comparación, análisis, síntesis e integración de conceptos tanto de la Geometría Analítica plana como de la espacial. Los contenidos que se estudian en este texto tienen gran variedad de aplicaciones en investigaciones matemáticas, en astronomía, física, química, biología, ingeniería, economía, entre otros.

El texto se encuentra dividido en 5 capítulos, cada uno de los cuales cuenta con el desarrollo de contenidos teóricos, ejercicios y problemas de aplicación. De esta manera se busca que al finalizar el trabajo con el texto "*Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*" los estudiantes sean capaces de:

- Definir y utilizar distintos sistemas de coordenadas.
- Hallar y estudiar lugares geométricos.
- Calcular ángulos, distancias y proyecciones en el plano y en el espacio.
- Reconocer y describir distintos tipos de superficies.
- Obtener y emplear las expresiones analíticas de curvas y superficies.
- Planificar estrategias para la resolución de problemas geométricos a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos.
- Analizar e interpretar resultados.

Agradecemos profundamente a todos aquellos colegas que durante los años de docencia compartidos realizaron valiosos aportes a los escritos preliminares de este libro. Asimismo queremos expresar nuestro agradecimiento por las observaciones realizadas, a los docentes que dedicaron parte de su tiempo a este texto en la etapa de revisión, en especial a la Magister *Mercedes Larriqueta* por su gran dedicación y esmero.

Por último queremos destacar especialmente y agradecer a las autoridades de la *Facultad de Ingeniería* de la *Universidad Nacional de Cuyo*, por el apoyo brindado para lograr la primera edición del presente texto.

Prólogo a la segunda edición

Luego de dos años de intenso trabajo a partir de la salida a la luz de la primera edición del presente texto y de haber compartido en las aulas con nuestros estudiantes la excelente recepción que el mismo obtuvo, es que iniciamos la agradable tarea de enriquecer determinados contenidos.

Es así que la presente edición incorpora ejemplos adicionales en diversos temas y la ampliación de algunos de los ejes temáticos, tales como: planos bisectores; hipérbolas conjugadas; ecuación del plano tangente a una esfera, aplicaciones prácticas de las secciones cónicas y aplicaciones prácticas de superficies en ingeniería y arquitectura.

Nuevamente deseamos destacar y agradecer especialmente a las autoridades de la *Facultad de Ingeniería* de la *Universidad Nacional de Cuyo*, por el apoyo brindado para lograr la segunda edición del presente texto y de la misma forma manifestar nuestro agradecimiento a colegas y amigos por sus valiosos aportes, comentarios y sugerencias realizadas.

Prólogo a la edición digital

A partir de la excelente recepción del presente texto entre más de mil estudiantes de las diversas carreras en los cuales se lo utilizó como material de estudio de referencia, y luego de un lapso de intenso trabajo llevado a cabo a partir de la impresión de la segunda edición, es que se aborda la tarea de implementar la edición digital del libro ***Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías***.

El advenimiento en las aulas universitarias de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, la disponibilidad amplia de enlaces de conectividad de banda ancha y el mayor acceso de los estudiantes a recursos móviles de cómputo en sus diversas formas, puso de manifiesto la necesidad de contar con una *edición digital* del material impreso, que facilite en gran medida los procesos de consultas y estudio de los diversos contenidos tratados en el texto.

La presente edición incluye la modificación de una gran cantidad de rasgos estilísticos y de contenido. Se revisaron y ampliaron ejercicios propuestos en los diversos capítulos, adicionando además algunos temas de interés propuestos a lo largo de la utilización de las dos ediciones impresas del presente material.

De esta manera, la edición digital del libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías* fue desarrollada con el espíritu de que la misma, a partir de su libre disponibilidad y descarga, sea compartida con la comunidad estudiantil y con los colegas interesados.

Al estudiante

¡Bienvenido al estudio de la geometría analítica!

En este texto encontrará el desarrollo de contenidos y actividades destinados a favorecer la comprensión y apropiación de conceptos de la Geometría Analítica del plano y del espacio.

Se recomienda encarecidamente realizar una lectura comprensiva de los contenidos teóricos, utilizando lápiz y papel para completar pasos o reafirmar conceptos, antes de intentar resolver los ejercicios. Se recomienda además contar con una calculadora con pantalla para gráficas o un computador con algún paquete de graficación, ya que el apropiado uso de estos elementos puede favorecer los procesos comprensivos de los conceptos desarrollados en la resolución de situaciones más complicadas.

Señalamos asimismo que el uso de estos recursos, no libera al científico o al ingeniero del conocimiento de los fundamentos de la geometría analítica, sino que permite visualizar rápidamente gran variedad de situaciones, al mismo tiempo que permite resolver problemas de mayor complejidad.

Capítulo 1:

Espacios Vectoriales y Vectores Geométricos

"Lo que aprendemos a hacer, lo aprendemos haciendo..."



Aristóteles

1.1 INTRODUCCIÓN

En el transcurso de la carrera y de su vida profesional, el estudiante de ciencias e ingeniería necesitará trabajar cotidianamente con estructuras algebraicas denominadas espacios vectoriales y con sus elementos denominados vectores.

Disciplinas como la física, con sus ramas que estudian la dinámica, la estática o los fenómenos derivados del electromagnetismo, por sólo citar algunos ejemplos, requieren de un uso intensivo de estas estructuras algebraicas. Es por esto que el estudiante necesita adquirir las herramientas apropiadas que le brinden la posibilidad de utilizar adecuadamente vectores como paso inicial al entendimiento profundo de las demás disciplinas.

Este capítulo provee al alumno de los conocimientos referidos a *Espacios Vectoriales y Vectores Geométricos*, necesarios para abordar temas específicos de la asignatura ***Geometría Analítica***, tales como el estudio analítico y resolución de

problemas relativos a rectas y planos, cónicas y superficies.

Desarrollaremos en primer lugar conceptos relativos a ***Espacios Vectoriales***, estudiando sus características y propiedades. A continuación presentaremos geométrica y analíticamente los vectores en los espacios bi y tridimensional y definiremos las operaciones entre ellos, estableciendo las propiedades básicas de las mismas. Ilustraremos además algunas aplicaciones de interés referentes a los temas en estudio.

1.2 ESPACIOS VECTORIALES

Como paso previo a la presentación de los contenidos específicos relacionados a *Espacios Vectoriales* que se desarrollarán en este capítulo, se introduce en primer lugar el concepto de espacio *n*-dimensional.

1.2.1 Espacio *n*-dimensional

Para llegar al concepto de espacio *n*-dimensional, revisemos los conceptos de espacios bi y tridimensionales.

1.2.1.1 Vectores en R^2

Cada punto del plano tal como el punto P de la Figura 1.1., puede ser representado por un par ordenado de números reales, los cuales reciben el nombre de *coordenadas* del punto P.

Si se une el origen del sistema de coordenadas O con el punto P mencionado, queda definido un vector ***v*** según se observa en la Figura 1.1.

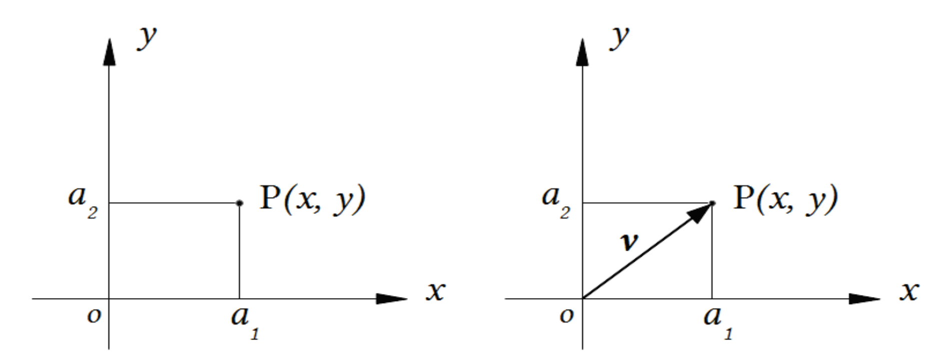


Figura 1.1

Definición: Un ***vector v*** en el plano *xy* es un *par ordenado* de números reales (a_1, a_2). Los números (a_1, a_2) reciben el nombre de componentes del vector ***v***. El *vector nulo,* que notaremos ***0***, es aquel que posee todas las componentes nulas, es decir ***0***=(0, 0).

1.2.1.2 Espacio bidimensional o R^2

Definición: El conjunto de todos los *pares ordenados* de números reales (a_1, a_2), constituye el espacio bidimensional o R^2.

1.2.1.3 Vectores en R^3

Así como cada punto del plano se puede representar por un par ordenado de números reales, cada punto del espacio tal como el punto Q, se representa por una terna ordenada de números reales (a_1, a_2, a_3). Si se une el origen del sistema de coordenadas O (Figura 1.2) con el punto Q, queda definido un vector $\boldsymbol{v}$ en el espacio tridimensional o R^3.

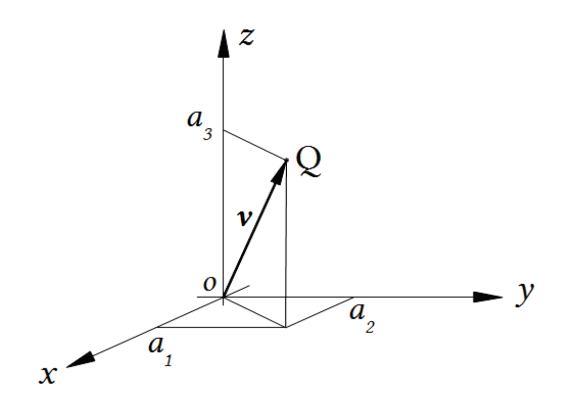


Figura 1.2.

Definición: Un ***vector v*** en R^3, es una terna ordenada de números reales, (a_1, a_2, a_3). Los números (a_1, a_2, a_3) reciben el nombre de *componentes* del vector $\boldsymbol{v}$. El *vector nulo,* que notaremos $\boldsymbol{0}$, es aquel que posee todas las componentes nulas, es decir $\boldsymbol{0}=(0, 0, 0)$.

¿Cómo se representan los puntos en el espacio tridimensional? (ver Figura 1.2). El procedimiento es el siguiente:

- Se elige un punto como origen de coordenadas 0.
- Se dibujan tres ejes perpendiculares entre sí: x, y, z.
- Se adoptan sentidos positivos para los mismos.
- Dichos ejes determinan tres planos coordenados: plano xy, plano xz, plano yz.
- Sobre los ejes x e y se marcan las coordenadas a_1 (abscisa) y a_2 (ordenada) respectivamente, a partir de las cuales trazamos líneas paralelas a los ejes

coordenados. A partir del punto de intersección de ambas líneas trazamos una línea paralela al eje z en la que ubicamos el punto Q a una cota o altura a_3.

1.2.1.4 Espacio tridimensional o R^3

Definición: El conjunto de todas las *ternas ordenadas* de números reales (a_1, a_2, a_3), constituye el *espacio tridimensional* o R^3.

1.2.1.5 Vectores en R^n

De la misma forma que en los casos anteriores, una *n-ada* ordenada de números reales $(a_1, a_2, a_3,..., a_n)$ define un vector $\boldsymbol{v}$ del espacio denominado espacio n-dimensional o R^n.

Una *n-ada* ordenada se puede interpretar en este espacio, como un *punto generalizado*, o como un ***vector generalizado***.

- Si el símbolo $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ se interpreta como un *punto generalizado*, entonces $a_1, a_2, ..., a_n$ constituyen las ***coordenadas*** del punto.
- Si el símbolo $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ se interpreta como un *vector generalizado*, entonces $a_1, a_2, ..., a_n$ son las ***componentes*** del *vector*.

Por consiguiente definimos el concepto de *vector* en R^n:

Definición: Un ***vector*** en R^n es una *n-ada* ordenada de números reales. Siendo n un entero positivo, entonces una *n-ada* ordenada es un sucesión de n números reales $(a_1, a_2, a_3,... ,a_n)$.

1.2.1.6 Espacio n-dimensional o R^n

Definición: El conjunto de todas las *n-adas* ordenadas de números reales $(a_1, a_2, a_3,... ,a_n)$, constituye el espacio n-dimensional o R^n.

En la Tabla 1.1, es posible observar una síntesis de los conceptos introducidos hasta el momento.

Par ordenado de números reales	(a_1, a_2)	El conjunto de todos los pares ordenados de números reales conforma el espacio bidimensional o R^2	R^2
Terna ordenada de números reales	(a_1, a_2, a_3)	El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales conforma el espacio tridimensional o R^3	R^3
...	...	...	...
n-ada ordenada de números reales	$(a_1, a_2, a_3,\dots, a_n)$	El conjunto de todas las *n*-adas ordenadas de números reales conforma el espacio n-dimensional o R^n	R^n

Tabla 1.1

1.2.1.7 Operaciones entre vectores del espacio n-dimensional o R^n

Para los vectores en el espacio *n*-dimensional se extienden las propiedades analíticas y numéricas de vectores en R^2 y en R^3, pero no las geométricas, las que revisaremos más adelante. Sean $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2,\dots, u_n)$ y $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2,\dots, v_n)$ vectores de R^n:

- Igualdad de vectores en R^n

Dos vectores en R^n son iguales si y sólo si ambos tienen el mismo número de componentes y las componentes correspondientes son iguales. Es decir:

$u_1=v_1,\ u_2=v_2, \dots, u_n=v_n$

Figura 1.3.

Propiedades de la *igualdad* de vectores en R^n

- *Simétrica*: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$
- *Transitiva:* Si $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$, entonces $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}$
- *Reflexiva:* Si $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$, entonces $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$

- Adición de vectores en R^n

Las componentes del vector suma $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, resultan de la suma de las respectivas componentes de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, es decir:

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)$

Propiedades de la *adición* de vectores en R^n

- *Asociativa:* $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
- *Conmutativa:* $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$
- *Existencia del vector nulo:* $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$
- *Existencia del vector inverso aditivo:* $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$

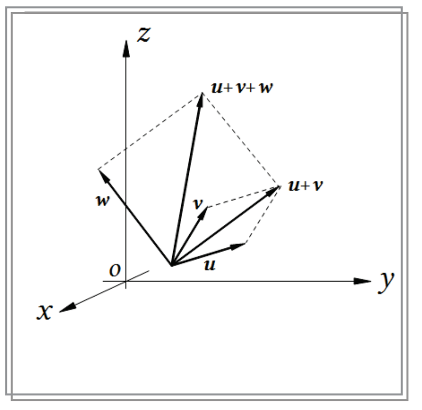


Figura 1.4.

• Producto de un vector de R^n por un escalar k

Al trabajar con vectores, a los números se los denomina escalares. Las componentes del vector $k\boldsymbol{u}$, resultan del producto del escalar $k \in R$, por cada una de las componentes del vector $\boldsymbol{u}$, es decir:

$k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2,\dots , ku_n)$

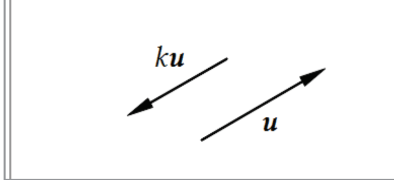


Figura 1.5.

Propiedades del *producto* de un vector por un escalar k

- *Asociativa:* $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1k_2)\boldsymbol{u}$
- *Distributiva con respecto a la suma de vectores:* $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$
- *Distributiva con respecto a la suma de escalares:* $(k_1+k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$
- *Existencia de elemento neutro:* $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
- Si k=0: *Vector nulo* en R^n: $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
- Si k=-1: *Inverso aditivo* en R^n: $(-1)\,\boldsymbol{u} = -\,\boldsymbol{u}$

✘ Ejercicio 1.1.

Dados los vectores $\boldsymbol{v}$=(-1, 1, 3, 2) y $\boldsymbol{r}$=(0, 2, 2, 1)
a) Determine $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{v}$
b) Determine $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{r}$

✘ Respuesta Ejercicio 1.1.

a) $\boldsymbol{u}$=2(-1, 1, 3, 2)=(-2, 2, 6, 4)

b) $\boldsymbol{w}$=(-1, 1, 3, 2)-3(0, 2, 2, 1)=(-1, 1, 3, 2)-(0, 6, 6, 3)=(-1, -5, -3, -1)

1.2.2 Espacio vectorial real *V*

Definición: Un ***espacio vectorial real*** *V* es un conjunto de objetos denominados ***vectores***, junto con dos operaciones llamadas *adición* y *multiplicación por un escalar* que satisfacen los diez axiomas que se enuncian a continuación:

- Axiomas de un espacio vectorial (E.V.).

1. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v} \in V$, entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$
2. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v} \in V$, entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
3. Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} \in V$, entonces $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$
4. Existe un vector $\boldsymbol{0}$ en V, vector nulo, tal que para todo $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$
5. Si $\boldsymbol{u} \in V$, existe $-\boldsymbol{u}$ en V, inverso aditivo, tal que $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=(-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$
6. Si $\boldsymbol{u} \in V$ y k es un escalar, entonces $k\boldsymbol{u} \in V$
7. Para todo vector $\boldsymbol{u} \in V$, $1.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$, siendo 1 la identidad multiplicativa.
8. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v} \in V$ y k es un escalar, entonces $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$
9. Si $\boldsymbol{u} \in V$ y k_1, k_2 son escalares, entonces $(k_1+k_2)\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{u}+k_2\boldsymbol{u}$
10. Si $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ y k_1, k_2 son escalares, entonces $k_1(k_2\,\boldsymbol{u}) = (k_1k_2)\boldsymbol{u} = k_2(k_1\boldsymbol{u})$

R^2, R^3, ... , R^n constituyen *espacios vectoriales* bajo las operaciones estándar de *adición* y *multiplicación por un escalar*.

Teorema: Sea V un espacio vectorial, $\boldsymbol{u}$ un vector en V y k un escalar, entonces:

a. $0.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ para todo vector $\boldsymbol{u} \in V$.

b. $k.\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ para todo número real k.

c. $(-1).\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}$ para todo vector $\boldsymbol{u} \in V$.

d. Si $k.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, entonces $k=0$ o bien $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, o ambas a la vez.

1.2.2.1 Combinación Lineal

Definición: Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vectores de un espacio vectorial V.
Entonces, cualquier expresión de la forma:
$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+k_n\boldsymbol{v}_n$
donde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son escalares, se denomina ***combinación lineal*** de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

✘ Ejercicio 1.2.

Dados los vectores $\boldsymbol{v_1}$=(-1, 1) y $\boldsymbol{v_2}$=(0, 2)

a) Verifique que $\boldsymbol{u}$=(2, 6) es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$, con coeficientes k_1=-2 y k_2= 4.
b) Escriba el vector $\boldsymbol{w}$ =(4, 2) como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$.

✘ Respuesta Ejercicio 1.2.

a) $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2}$

$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2}$=(-2)(-1, 1)+4(0, 2)=(((-2).(-1)+4.0),(-2+8))=(2, 6)

b) $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2}$

(4, 2)=k_1(-1, 1)+k_2(0, 2)

Igualando componente a componente, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -k_1 + 0k_2 = 4 \\ 1k_1 + 2k_2 = 2 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene k_1=-4, que sustituido en la segunda permite obtener k_2=3.

Es decir, $\boldsymbol{w} = -4\ \boldsymbol{v_1} + 3\ \boldsymbol{v_2}$.

1.2.2.2 Conjunto generador de un Espacio Vectorial

Definición: Se dice que los vectores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ en un espacio vectorial V, ***generan*** a V, si todo vector de V se puede expresar como *combinación lineal* de ellos.
Es decir, si para todo vector $\boldsymbol{v} \in V$, existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tales que:
$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2} +\ldots+k_n\boldsymbol{v_n}$.

Ejemplos:

1) En R^2: $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$

$$\boldsymbol{v} =(a_1, a_2)=(a_1, 0)+(0 , a_2)=a_1(1, 0)+a_2(0, 1)=a_1\boldsymbol{i}+a_2\,\boldsymbol{j}$$

Entonces, siendo que cualquier vector de R^2 se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, se dice que $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ es un conjunto *generador* de R^2.

2) En R^3: $\{\boldsymbol{i} , \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$

$$\boldsymbol{v}=(a_1, a_2, a_3)=(a_1, 0, 0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)=$$
$$=a_1(1, 0, 0)+a_2(0, 1, 0)+a_3(0, 0, 1)=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

Entonces, siendo que cualquier vector de R^3 se puede escribir como combinación

lineal de los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Se dice que $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ es un conjunto *generador* de R^3.

3) En R^3 : $\{\boldsymbol{u}\}$

Siendo $\boldsymbol{u}$ un vector no nulo de R^3, $\{\boldsymbol{u}\}$ es un conjunto *generador* de un subconjunto de R^3. Todos los vectores de este subconjunto de R^3 tienen la forma: $\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{u}$.

En el siguiente capítulo veremos que dicho subconjunto corresponde al lugar geométrico de los puntos de R^3 que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas y su dirección está dada por el vector $\boldsymbol{u}$.

4) En R^2: $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$, siendo $\boldsymbol{v_1}=(3, 0)$ y $\boldsymbol{v_2}=(2, 1)$,

$\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ es un conjunto *generador* de R^2, porque para todo vector $\boldsymbol{v} \in R^2$, existen escalares k_1, k_2 tales que:

$k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v}$. Es decir,

$k_1(3, 0) + k_2(2, 1)=(a_1, a_2)$

Igualando componente a componente, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = a_1 \\ 0k_1 + 1k_2 = a_2 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene $k_2=a_2$, que sustituido en la primera permite obtener $k_1=(a_1 - 2a_2)/3$. Por lo tanto, para cada par ordenado (a_1, a_2) podemos obtener los escalares k_1 y k_2 con las expresiones recién obtenidas.

- Propiedad

- La *adición* de uno o más vectores a un conjunto generador de un *espacio vectorial*, da por resultado otro *conjunto generador.*

Veamos a continuación, dos tipos de relaciones que pueden darse entre vectores de un mismo espacio vectorial.

1.2.2.3 Dependencia e Independencia Lineal

Definición: Sean $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, ..., \boldsymbol{v_n}$ n vectores de un espacio vectorial V.
Se dice que dichos vectores son ***linealmente dependientes*** (L.D.), si existen n escalares k_1, k_2, ..., k_n, no todos nulos, tales que $k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}+...+k_n\boldsymbol{v_n}=\boldsymbol{0}$

Ejemplo:

¿Qué relación existe entre los vectores $\boldsymbol{v_1}=(1, 2)$ y $\boldsymbol{v_2}=(2, 4)$?
$\boldsymbol{v_2}=2\boldsymbol{v_1}$ es decir, $\boldsymbol{v_2}-2\boldsymbol{v_1}=\boldsymbol{0}$ Por lo tanto existen escalares no nulos ($k_1=-2$ y $k_2=1$) que permiten escribir la C.L. de ellos igual al vector nulo. Es así que, el conjunto formado por dichos vectores, $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$, es conjunto L.D.

Definición: Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ n vectores de un espacio vectorial V.
Se dice que dichos vectores son ***linealmente independientes*** (L.I.), si la *única* combinación lineal de ellos que da por resultado el vector nulo, es aquella que tiene todos los escalares nulos. Es decir,

$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+k_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0} \qquad k_1=k_2=k_3=\ldots=k_n=0$

✘ Ejercicio 1.3.

Determine si los siguientes conjuntos de vectores son L.D. o L.I.:

a) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ $\quad \boldsymbol{v}_1=(-1, 3)$ $\quad \boldsymbol{v}_2=(3, -9)$
b) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ $\quad \boldsymbol{v}_1=(3, 0)$ $\quad \boldsymbol{v}_2=(2, 1)$
c) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ $\quad \boldsymbol{v}_1=(3, 0)$ $\quad \boldsymbol{v}_2=(2, 1)$ $\quad \boldsymbol{v}_3=(5, 1)$

✘ Respuesta Ejercicio 1.3.

a) Observamos que $\boldsymbol{v}_2= -3\boldsymbol{v}_1$. Es decir, $\boldsymbol{v}_2-3\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$ Por lo tanto existen escalares no nulos (k_1=-3 y k_2=1) que permiten escribir la C.L. de ellos igual al vector nulo. Es así que, el conjunto formado por dichos vectores, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, es conjunto L.D.

b) $\quad k_1(3, 0) + k_2(2, 1)=(0, 0)$

Igualando componente a componente, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = 0 \\ 0k_1 + 1k_2 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene k_2=0, que sustituido en la primera permite obtener k_1=0. Por lo tanto, siendo todos los escalares nulos la *única* solución del sistema, se concluye que el conjunto de vectores dado es linealmente independiente (L.I.).

c) $\quad k_1(3, 0) + k_2(2, 1) + k_3(5, 1)=(0, 0)$

Igualando componente a componente, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 + 5k_3 = 0 \\ 0k_1 + 1k_2 + 1k_3 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene $k_2=-k_3$, que sustituido en la primera permite obtener $k_1=-k_3$ Por lo tanto, existen escalares no nulos al escribir la combinación lineal de los vectores dados que da el vector nulo. También es posible observar que $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$. Es así que el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente.

Luego de haber visto los ejemplos anteriores, podemos generalizar lo siguiente:

Sean $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ dos vectores de un E.V. V linealmente dependientes (L.D.).

Es decir, $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{0}$ implica no todos los escalares nulos.

Supongamos k_1 no nulo, entonces podemos escribir:

$\boldsymbol{v_1} = -(k_2/k_1)\boldsymbol{v_2}$

Por lo tanto $\boldsymbol{v_1}$ es múltiplo escalar de $\boldsymbol{v_2}$.

En sentido inverso, si $\boldsymbol{v_1}$ es múltiplo escalar de $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_1}=k\boldsymbol{v_2}$, podemos llegar a una expresión $\boldsymbol{v_1} - k\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{0}$, que nos permite afirmar que son vectores L.D., pues existen escalares no nulos al escribir la combinación lineal de los vectores dados que da el vector nulo.

Estos resultados se expresan de la siguiente manera:

Teorema: Dos vectores un E.V. V son linealmente dependientes (L.D.) si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

El siguiente Teorema vincula los conceptos de independencia lineal y conjunto generador.

Teorema: Todo conjunto de n vectores linealmente independientes (L.I.) en R^n *genera* a R^n.

Sea en R^2 un conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ de dos vectores de R^2 L.I. Por lo tanto,

$k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{0}$

tiene solución única $k_1=k_2=0$. Este teorema afirma que, siendo $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ un conjunto de dos vectores de R^2 L.I., es conjunto generador de R^2. Es decir, cualquier vector $\boldsymbol{v}$ de R^2 se puede escribir como combinación lineal de ellos:

$k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v}$

En otras palabras, podremos determinar los valores de los escalares k_1 y k_2 para cada vector $\boldsymbol{v}$ de R^2.

Sea en R^3 un conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ de tres vectores de R^3 L.I. Por lo tanto,

$k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}+k_3\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{0}$

tiene solución única $k_1=k_2=k_3=0$. El teorema anterior afirma que, dado un conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ de tres vectores de R^3 L.I., es conjunto generador de R^3. Esto implica que cualquier vector $\boldsymbol{v}$ de R^3 se puede escribir como combinación lineal de ellos: $k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}+k_3\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{v}$

Es decir, para cada vector $\boldsymbol{v}$ de R^3 existen escalares que permiten escribir a dicho vector como C.L. de los vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$.

1.2.2.4 Base y Dimensión

Definición: Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ es una ***base*** de un espacio vectorial V si:

a) $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ es conjunto *linealmente independiente* (L.I.).

b) $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ es conjunto *generador* de V.

Hemos visto en el Teorema anterior que todo conjunto de *n* vectores linealmente independientes (L.I.) en R^n *genera* a R^n. Entonces, de acuerdo a la definición de base, se tiene que

> Todo conjunto de *n* vectores L.I. en R^n, constituye una *base* de R^n.

Ejemplos:

1) En R^2: a) {(1, 0); (0, 1)} Base *canónica* o *estándar* de R^2

b) {(3,0); (2,1)} En el Ejercicio 1.3 se demostró que este conjunto es L.I. Y dos vectores de R^2 L.I., generan a R^2. Por lo tanto son base de R^2.

2) En R^3: a) {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)} Base *canónica* o *estándar* de R^3

b) {(2, 0, 0); (4 , 7, 0); (9, 0, -3)} Es un conjunto vectores de R^3 L.I., (se deja como ejercicio demostrar que son vectores L.I.). Constituyen una base de R^3 ya que tres vectores de R^3 L.I. generan a R^3 y por lo tanto son base de R^3 .

En un mismo espacio vectorial *V* puede haber muchas bases, ya que cualquier conjunto de vectores de ese espacio vectorial *V*, que cumpla con las condiciones de ser conjunto linealmente independiente y conjunto generador del espacio vectorial *V*, es base del mismo.

Enunciaremos los siguientes teoremas:

Teorema: Si $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots , \boldsymbol{v_n}\}$ es una base de un E.V. *V*, entonces todo conjunto con más de *n* vectores es linealmente dependiente (L.D.).

Ejemplos:

1) En R^2: a) {(1, 0); (0, 1); (2, 3)} Conjunto L.D.

2) En R^3: b) {(2, 0, 0); (4, 7, 0); (9, 0, -3); (0, 0, 1)} Conjunto L.D.

Todos los espacios vectoriales pueden tener muchas bases. ¿Esas bases tienen el mismo número de vectores?

Teorema: Si $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}\}$ y $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ son bases del espacio vectorial *V* entonces $m=n$.

Es decir, dos bases cualesquiera de un espacio vectorial *V*, contienen el mismo número de vectores.

Definición: Si el espacio vectorial V tiene una base finita, es decir con finitos elementos, entonces la ***dimensión*** de V que se denota dim V, es el número de vectores que tiene una cualquiera de las bases de V. Este último recibe el nombre de E.V. *de dimensión finita*. En cualquier otro caso se dice que V es E.V. *de dimensión infinita.*
Si $V=\{\boldsymbol{0}\}$ se dice que V es de dimensión cero.

Ejemplos:

1) Dim $R^2=2$

2) Dim $R^3=3$

3) Dim $R^n=n$

Teorema: Si $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ es una *base* de un espacio vectorial V y si $\boldsymbol{v}$ pertenece a V, entonces existe un conjunto *único* de escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tales que:

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \ldots + k_n\boldsymbol{v_n}$$

Para demostrar este Teorema suponemos por el absurdo que existen dos conjuntos de escalares que permiten escribir al vector $\boldsymbol{v}$ como C.L. de los vectores del conjunto dado $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$. Es decir:

$$\boldsymbol{v} = \propto_1\boldsymbol{v_1} + \propto_2\boldsymbol{v_2} + \ldots + \propto_n\boldsymbol{v_n}$$

$$\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{v_1} + \beta_2\boldsymbol{v_2} + \ldots + \beta_n\boldsymbol{v_n}$$

Ahora restamos miembro a miembro y obtenemos la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{0} = (\propto_1 - \beta_1)\boldsymbol{v_1} + (\propto_2 - \beta_2)\boldsymbol{v_2} + \ldots + (\propto_n - \beta_n)\boldsymbol{v_n}$$

Pero el conjunto dado $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ es base de V y por lo tanto es conjunto L.I. Es así que en la expresión anterior, los escalares que permiten escribir la C.L. de ellos que da el vector nulo, son todos nulos. Es decir:

$$\propto_1 - \beta_1 = \propto_2 - \beta_2 = \ldots = \propto_n - \beta_n = 0$$

De donde se deduce que

$$\propto_1 = \beta_1\,;\ \propto_2 = \beta_2\,;\ \ldots\,;\ \propto_n = \beta_n$$

Esto nos permite afirmar que existe un conjunto único de escalares para escribir cada vector $\boldsymbol{v}$ de un espacio vectorial V como C.L. de los vectores de una cualquiera de sus bases.

Ejemplos:

a) $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ es la *base canónica* de R^2. Escribimos un vector cualquiera $\boldsymbol{v}=(a_1, a_2)$ de R^2 de la siguiente manera:

$\boldsymbol{v} = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$

Vemos que cualquier vector de R^2, $\boldsymbol{v}=(a_1, a_2)$, se escribe como C.L. de los vectores de la base canónica $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. Los coeficientes de dicha C.L. son las componentes del vector $\boldsymbol{v}$. Para cada vector $\boldsymbol{v}$ los coeficientes de dicha C.L. son únicos.

b) {(3,0), (2,1)} es *base* de R^2, ya que en el ejercicio 1.3 demostramos que es conjunto linealmente independiente y por ser dos vectores de R^2 linealmente independientes, es conjunto generador de R^2. Si escribimos al vector $\boldsymbol{w}$ = (8, -2) como combinación lineal de ellos, encontramos que:

$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2}$

$(8, -2) = k_1(3, 0) + k_2(2, 1)$

Igualando componente a componente, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = 8 \\ 0k_1 + 1k_2 = -2 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene $k_2=-2$, que sustituido en la primera permite obtener $k_1=4$.

Es decir, $\boldsymbol{w} = 4\,\boldsymbol{v_1} - 2\,\boldsymbol{v_2}$

Los escalares k_1 y k_2 son los únicos que permiten escribir al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores de la base dada.

A continuación veremos que dichos escalares reciben el nombre de coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$ respecto a la base dada.

1.2.2.5 Coordenadas de un vector relativas a una Base

Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

Sea $B=\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ una base de V.

Entonces, todo vector $\boldsymbol{v}$ de V puede expresarse de una *única* manera como combinación lineal de los vectores de la base, es decir: $\boldsymbol{v}=k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}+...+k_n\boldsymbol{v_n}$

Los escalares de la combinación lineal se denominan *coordenadas* de $\boldsymbol{v}$ respecto a la base B.

El *vector de coordenadas* de $\boldsymbol{v}$ relativo a la base B se denota $(\boldsymbol{v})_B$:

$$(\boldsymbol{v})_B = (k_1, k_2, ..., k_n)$$

✘ Ejercicio 1.4.

a) Demuestre que el siguiente conjunto A de vectores de R^3 es un conjunto linealmente independiente:

A={ (1,2,0); (-1,0,3); (0,0,2)}

b) Indique si el conjunto A es base de R^3 . Justifique su respuesta.

c) Determine las coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$=(1, 4, 11) en la base dada.

✘ Respuesta Ejercicio 1.4.

a) Para estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores A escribimos la combinación lineal de ellos que da el vector nulo. Es decir,

$k_1(1, 2, 0)+k_2(-1, 0, 3)+k_3(0, 0, 2)=(0, 0, 0)$

Igualando componente a componente se obtiene:

$$\begin{cases} 1\,k_1 - 1\,k_2 + 0\,k_3 = 0 \\ 2\,k_1 + 0\,k_2 + 0\,k_3 = 0 \\ 0\,k_1 + 3\,k_2 + 2\,k_3 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema, se deduce que k_1=0, que sustituido en la primera ecuación permite obtener k_2=0. Finalmente, de la tercera ecuación surge: k_3=0.

Por lo tanto, siendo la única solución del sistema aquella que tiene todos los escalares nulos, se concluye que el conjunto de vectores dado A es linealmente independiente (L.I.).

b) Tres vectores de R^3 linealmente independientes generan a R^3. Por lo tanto, por ser conjunto *linealmente independiente* (L.I.) y *conjunto generador* de R^3, A es una base de R^3.

c) Para determinar el vector de coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$=(1, 4, 11) en la base dada A, escribimos a $\boldsymbol{w}$ como C.L. de los vectores del conjunto A. Es decir,

$k_1(1, 2, 0)+k_2(-1, 0, 3)+k_3(0, 0, 2)=(1, 4, 11)$

Igualando componente a componente se obtiene:

$$\begin{cases} 1\,k_1 - 1\,k_2 + 0\,k_3 = 1 \\ 2\,k_1 + 0\,k_2 + 0\,k_3 = 4 \\ 0\,k_1 + 3\,k_2 + 2\,k_3 = 11 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que k_1=2, que sustituido en la primera permite obtener:

k_2=1.

Finalmente, de la tercera ecuación surge: k_3=4

Por lo tanto:

$$(\boldsymbol{w})_A = (2, 1, 4)$$

Verificación: 2(1, 2, 0)+1(-1, 0, 3)+4 (0, 0, 2)=(2-1, 4, 3+8)=(1, 4, 11)

✘ Ejercicio 1.5.

a) Demuestre que el conjunto B de vectores de R^2 es linealmente independiente:

$B=\{(1, 2);(0, -1)\}$

b) Indique si el conjunto B es base de R^2. Justifique su respuesta.

c) Determine las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}=(1,-1)$ en la base dada. Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 1.5.

a) El conjunto B tiene dos vectores de R^2 L.I. ya que las componentes de ambos vectores no son proporcionales.

Otra forma de demostrar la independencia lineal es plantear la C.L. de los vectores del conjunto B que da el vector nulo y verificar que los escalares de dicha C.L. admiten como solución única los valores nulos.

b) El conjunto B tiene dos vectores de R^2 L.I. Por lo tanto es conjunto generador de R^2. Siendo conjunto L.I. y conjunto generador de R^2, constituye una base de R^2.

c) Las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ en la base dada $(\boldsymbol{v})_B = (k_1, k_2)$ se determinan a partir de:

$\boldsymbol{v}=k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}$, siendo $B=\{\boldsymbol{v_1}; \boldsymbol{v_2}\}$,

Sustituyendo las componentes de los vectores dato se obtiene:

$(\boldsymbol{v})_B = (1,3)$

La Figura 1.6. muestra la representación gráfica del problema planteado.

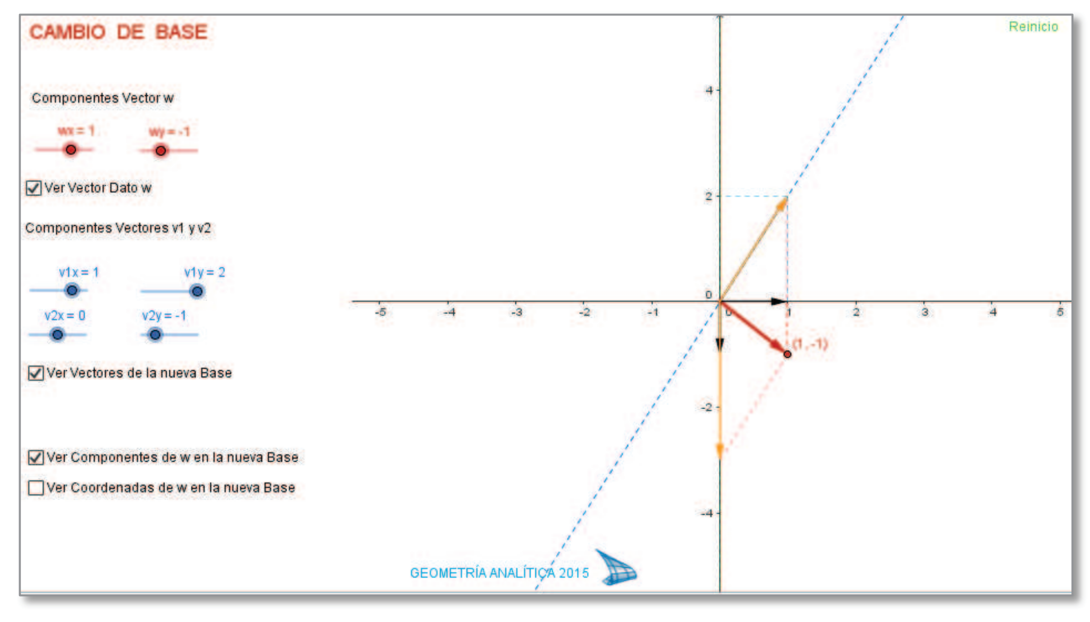


Figura 1.6.

Dentro de un espacio vectorial V podemos definir subconjuntos de vectores que cumplan determinadas condiciones. Algunos de dichos subconjuntos serán en sí mismos espacios vectoriales y otros no.

1.2.2.6 Subespacio Vectorial

Definición: Un subconjunto S no vacío de un espacio vectorial V, es un ***subespacio*** de V, si S es en sí mismo un espacio vectorial, bajo las operaciones de *adición* y *multiplicación por un escalar* definidas en V.

Teorema: Si S es un conjunto de uno o más vectores de un espacio vectorial V entonces S es un *subespacio* de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) Si $\boldsymbol{u} \in S$ y $\boldsymbol{v} \in S$, entonces $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \in S$.

b) Si $\boldsymbol{u} \in S$ y k es un escalar, entonces $k\boldsymbol{u} \in S$.

Demostración:

⇒ Si S es un espacio vectorial, entonces se satisfacen todos los axiomas de los espacios vectoriales; en particular se cumplen los axiomas 1 y 6 que son precisamente las condiciones (1) y (2).

⇐ Supongamos que se cumplen las condiciones (1) y (2). Estas condiciones son los axiomas 1 y 6 de los espacios vectoriales. Queremos demostrar que S satisface los 8 axiomas restantes. Los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 son satisfechos automáticamente por los vectores en S, dado que son satisfechos por todos los vectores en V. Veamos que los axiomas 4 y 5 son satisfechos por S:

Sea $\boldsymbol{u}$ cualquier vector en S. Por la condición (2), k$\boldsymbol{u}$ está en S para todo escalar k. En particular:

- Considerando k=0, se deduce que $0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ está en S.
- Y al hacer k=-1, se concluye que $(-1).\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ está en S.

✘ Ejercicio 1.6.

Determine, justificando su respuesta, si los siguientes conjuntos son subespacios de R^2:

$S_1=\{(x, y) \in R^2 \ / \ x+2y=0\}$ $\quad$ $S_2 = \{(x, y) \in R^2 \ / \ -x+y-3=0\}$

✘ Respuesta Ejercicio 1.6.

- $S_1=\{(x, y) \in R^2 \ / \ x+2y=0\}$

$\boldsymbol{u} = (x_1, y_1) \in S_1$ Entonces: $x_1+2y_1=0$ Es decir: $x_1=-2y_1$

Por lo tanto: $\boldsymbol{u}=(-2y_1, y_1)$
$\boldsymbol{v} = (x_2, y_2) \in S_1$ Entonces: $x_2+2y_2=0$ Es decir: $x_2=-2y_2$
Por lo tanto: $\boldsymbol{v}=(-2y_2, y_2)$

Veamos si se cumplen las condiciones a) y b) del teorema:
a) $\boldsymbol{u} \in \mathbf{S}_1$ y $\boldsymbol{v} \in S_1$ ¿$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \in S_1$?
$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=((-2y_1-2y_2), (y_1+y_2))=(-2(y_1+y_2), (y_1+y_2))$

Vemos que se verifica la condición de pertenencia al subespacio S_1, es decir $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \in S_1$, ya que la primera componente del vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ es igual a menos dos veces la segunda componente. O también:

$-2(y_1+y_2) + 2(y_1+y_2)=0$

b) $\boldsymbol{u} \in S_1$ ¿ $k\boldsymbol{u} \in S_1$?
$\boldsymbol{u}=(x_1, y_1) \in S_1$ Entonces: $\boldsymbol{u}=(-2y_1 , y_1)$
$k\boldsymbol{u}=(kx_1, ky_1)$

Entonces: $k\boldsymbol{u}=(k\,(-2y_1), k\,y_1)=(-2(ky_1), ky_1)$. Por lo tanto, $k\boldsymbol{u} \in S_1$ ya que la primera componente del vector $k\boldsymbol{u}$ es igual a menos dos veces la segunda componente. O también:

$k(-2y_1)+2(ky_1)=0$

Por cumplirse las condiciones a) y b), el conjunto S_1 es un subespacio de R^2.

- $S_2=\{(x, y) \in R^2 \ / \ -x+y-3=0\}$

$\boldsymbol{u}=(x_1, y_1) \in S_2$ Entonces: $-x_1+y_1-3=0$ Es decir: $x_1=y_1-3$

Por lo tanto: $\boldsymbol{u}=(y_1-3 , y_1)$

$\boldsymbol{v} = (x_2, y_2) \in S_2$

Entonces: $-x_2+y_2-3=0$

Es decir: $x_2=y_2-3$

Por lo tanto: $\boldsymbol{v}=(y_2-3 , y_2)$

Veamos si se cumplen las condiciones (a) y (b) del teorema:

a) $\boldsymbol{u} \in S_2$ y $\boldsymbol{v} \in S_2$ ¿ $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \in S_2$?

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=((y_1-3 + y_2-3) , (y_1+y_2))$

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=((y_1+y_2)-6, (y_1+y_2))$

Vemos que no se verifica la condición de pertenencia al subespacio S_2 , ya que:
$-(y_1+y_2)+6+(y_1+y_2)-3\neq 0$

Por lo tanto, el conjunto S_2 , <u>no</u> es un subespacio de R^2.

Luego de haber planteado el ejercicio anterior, generalizamos para todas las rectas posibles en R^2:

a) Rectas que pasan por el origen de coordenadas: $y=mx$

siendo m un valor fijo y $m \in R$

El conjunto de todos los puntos que pertenecen a esta recta está dado por:

$A=\{(x, mx) \ / \ x \in R\}$

A es subconjunto de R^2 y también es subespacio de R^2.

b) Rectas que no pasan por el origen de coordenadas: $y=mx+b$

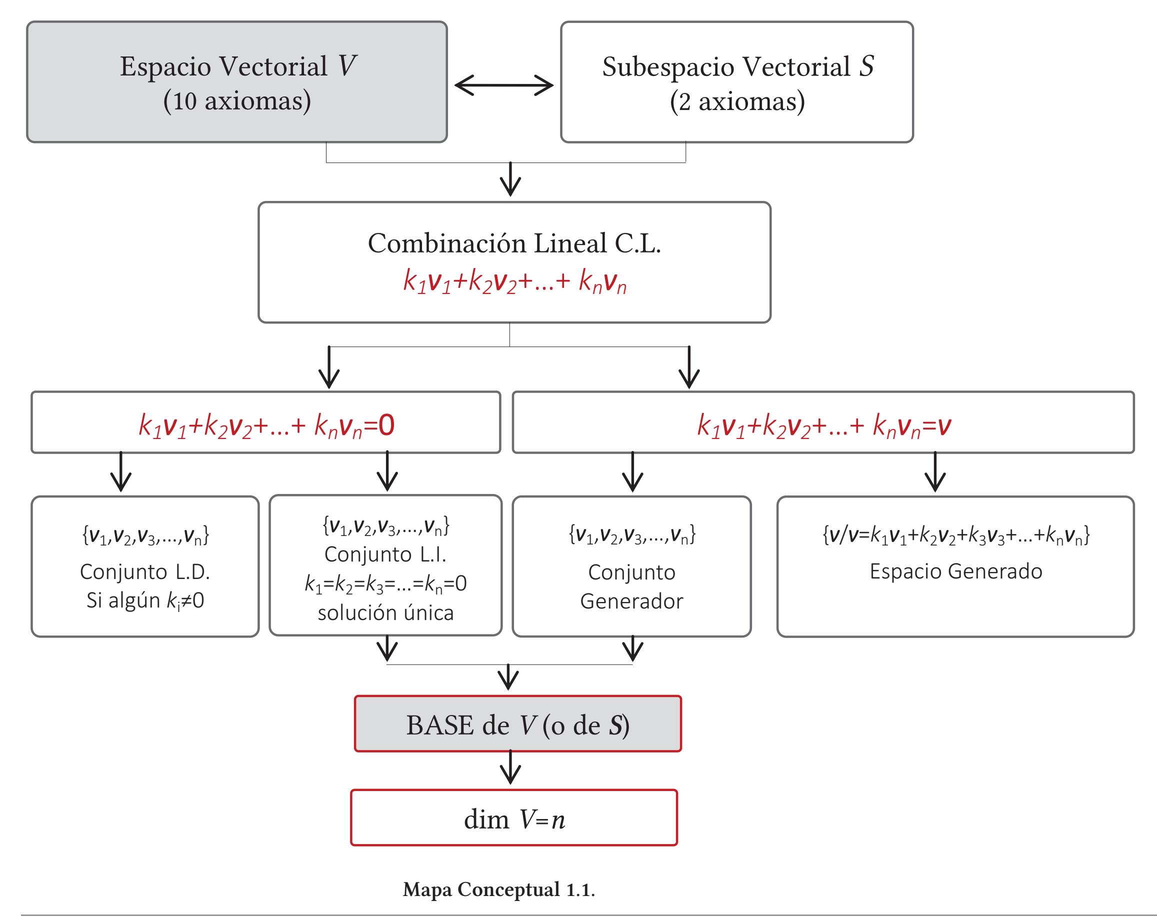
siendo m y b ambas constantes que toman valores reales.

El conjunto de todos los puntos que pertenecen a esta recta está dado por:

$B=\{(x, mx+b) \ / \ x \in R\}$

B es subconjunto de R^2 pero B no es subespacio de R^2.

Los conceptos indicados en los apartados precedentes, pueden ser sintetizados en el siguiente *mapa conceptual*:



Mapa Conceptual 1.1.

1.3 VECTORES GEOMÉTRICOS

En este tema estudiaremos el concepto de vector geométrico en los espacios bidimensional y tridimensional, analizando las operaciones que podemos realizar en cada uno de ellos, junto con sus propiedades y aplicaciones.

1.3.1 Definición de vector.

A continuación veremos las definiciones algebraica y geométrica de vector en R^2 y en R^3.

1.3.1.1 Definición geométrica de vector

Revisamos en primer lugar la definición de segmento de recta dirigido:

> **Definición:** Sean P y Q dos puntos de R^2 o de R^3. El segmento de recta dirigido ***PQ*** es el segmento de recta que se extiende de P a Q.

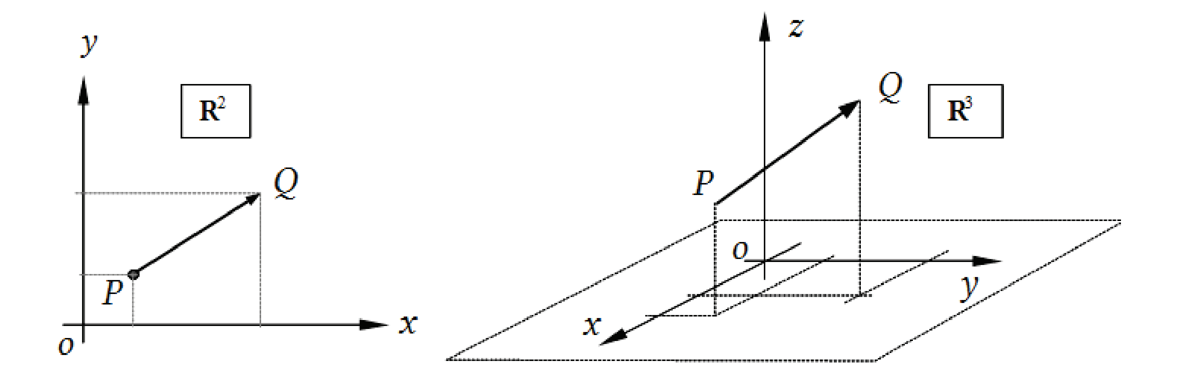


Figura 1.7.

A continuación definiremos segmentos de rectas dirigidos equivalentes:

> **Definición:** Dos segmentos de recta dirigidos ***PQ*** y ***RS*** se dice que son *equivalentes* si tienen la misma longitud, dirección y sentido, sin importar dónde están localizados respecto al origen de coordenadas.

Estamos ahora en condiciones de definir vectores desde el punto de vista geométrico.

> **Definición:** El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, recibe el nombre de *vector.*

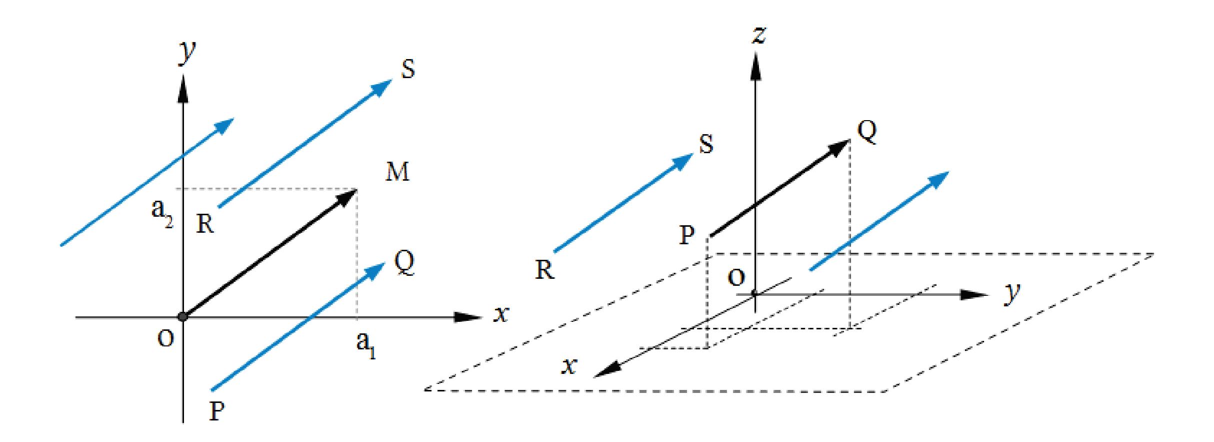


Figura 1.8.

Todo segmento de recta dirigido que esté en ese conjunto se llama representación del vector ***v***.

Trabajaremos con vectores libres, es decir, no interesa donde están localizados respecto del origen de coordenadas (Figura 1.8).

1.3.1.2 Definición algebraica de vector

> **Definición:** Un vector ***v*** en el plano *xy* es un par ordenado de números reales (v_1, v_2).
>
> Los números v_1 y v_2 reciben el nombre de *componentes del vector*.
>
> Un vector ***v*** en R^3 es una terna ordenada de números reales (v_1, v_2, v_3).
>
> Los números v_1, v_2 y v_3 reciben el nombre de *componentes del vector.*

Las definiciones algebraica y geométrica de vector, describen al mismo objeto, sólo que desde puntos de vista diferentes.

✗ Ejercicio 1.7.

Represente los siguientes vectores con punto inicial en el origen de coordenadas:

a) ***v*** = (-3, 1)

b) ***w*** = (-2, -1)

c) ***u*** = (2, 0, 4) ¿a qué plano coordenado pertenece?

d) ***r*** = (0, -2, 5) ¿a qué plano coordenado pertenece?

1.3.1.3 Magnitud, longitud o módulo de un vector

La longitud, magnitud o módulo de un vector es la longitud de una cualquiera de sus representaciones. Siempre es un número positivo.

En R^2:

$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$ $\qquad \|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ $\qquad$ Módulo de un vector $\boldsymbol{v}$ en R^2

En R^3:

$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$ $\qquad \|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ $\qquad$ Módulo de un vector $\boldsymbol{v}$ en R^3

1.3.2 Operaciones entre vectores

Desde el punto de vista algebraico, ya hemos definido las operaciones igualdad de vectores, suma de vectores y producto de un vector por un escalar en R^n, válidas para vectores en R^2 y en R^3.

Veamos a continuación las operaciones mencionadas, en este caso desde el punto de vista geométrico.

- Igualdad de vectores

Desde el punto de vista geométrico, dos vectores ***u*** y ***v*** son iguales si tienen la misma *dirección*, el mismo *módulo* y el mismo *sentido* (aún cuando puedan estar localizados en posiciones diferentes).

- Suma de vectores

Desde el punto de vista geométrico: Sean ***v*** y ***w*** dos vectores cualesquiera. Se coloca ***w*** de modo tal que su punto inicial coincida con el punto terminal de ***v***, (Figura 1.8). El vector ***v***+***w*** es el vector que va desde el punto inicial de ***v*** al punto terminal de ***w***.

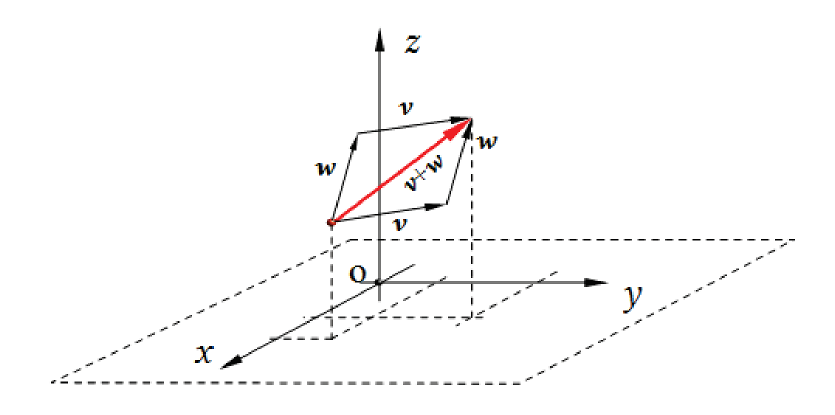


Figura 1.9

Si analizamos en la misma figura ***v+w*** y ***w+v*** podemos observar que:

- ***v+w=w+v***

- el vector suma coincide con la diagonal del paralelogramo determinado por ***v*** y ***w*** al ubicar estos vectores de forma tal que tengan el mismo punto inicial. Se denomina r*egla del paralelogramo*.

- Producto de un vector por un escalar

Desde el punto de vista geométrico, el vector $k\boldsymbol{v}$ es un vector tal que:

- su *módulo* es: $\|k\boldsymbol{v}\| = |k| \, \|\boldsymbol{v}\|$
- su *dirección* es: la misma dirección que ***v***
- su *sentido* es: el mismo sentido que ***v*** si $k > 0$ y sentido opuesto a ***v*** si $k < 0$

1.3.3 Vector unitario o versor

Un vector unitario o versor ***u*** es aquel cuyo módulo es igual a 1.

Sea ***u*** el versor correspondiente a ***v*** , es decir, ***u*** tiene la misma dirección y sentido que ***v***, pero módulo igual a 1, (ver Figura 1.10).

$\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$ $\quad k \in R^{+}$ (I) donde R^{+} representa el conjunto de los números reales positivos.

Por lo tanto el módulo del vector ***v*** es:

$\|\boldsymbol{v}\| = k \, \|\boldsymbol{u}\|$

Siendo el módulo de ***u*** igual a 1, resulta entonces:

$\|\boldsymbol{v}\| = k$ (II)

Sustituyendo (II) en (I) se obtiene:

$\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|\ \boldsymbol{u}$

Es decir: $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$

En R^2:

Sea $\boldsymbol{v}$ cualquier vector no nulo en R^2, entonces, $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección y el mismo sentido que $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}(v_1, v_2) = \left(\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|}, \frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|}\right)$$

Verifiquemos que el módulo de $\boldsymbol{u}$ es igual a 1:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \left\|\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right\| = \left\|\left(\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|}, \frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = 1$$

En R^3:

Sea $\boldsymbol{v}$ cualquier vector no nulo en R^3, entonces, $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección y el mismo sentido que $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|}, \frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|}, \frac{v_3}{\|\boldsymbol{v}\|}\right)$$

Verifiquemos que el módulo de $\boldsymbol{u}$ es igual a 1:

$$\| u \| = \left\|\frac{v}{\| v \|}\right\| = \left\|\left(\frac{v_1}{\| v \|}, \frac{v_2}{\| v \|}, \frac{v_3}{\| v \|}\right)\right\| = \frac{1}{\| v \|}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \frac{\| v \|}{\| v \|} = 1$$

Los vectores unitarios canónicos son los siguientes:

En R^2: $\boldsymbol{i}$=(1,0) , $\boldsymbol{j}$=(0,1)

En R^3: $\boldsymbol{i}$=(1,0,0) , $\boldsymbol{j}$=(0,1,0) , $\boldsymbol{k}$=(0,0,1)

1.3.4 Cosenos directores de un vector

Definición: Se llaman ***cosenos directores*** de un vector respecto de un sistema de coordenadas ortogonales *xy* a los cosenos de los ángulos que el vector forma con el sentido positivo de los ejes coordenados. Los ángulos se toman entre 0º y 180º, de forma tal que los cosenos directores pueden ser positivos o negativos.

En R²: Sea $\boldsymbol{v}$ cualquier vector no nulo en R^2

- *cosenos directores*: $\cos\alpha = \frac{v_1}{\|v\|}$, $\cos\beta = \frac{v_2}{\|v\|}$
- *ángulos directores*: α , β

Entonces, el vector unitario o versor resulta: $\boldsymbol{u} = \left(\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta)$

Siendo $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, se tiene que:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

la cual constituye la relación fundamental que liga los cosenos directores de un vector en R^2.

- En R^3: Sea $\boldsymbol{v}$ cualquier vector no nulo en R^3

Definición: Se llaman ***cosenos directores*** de un vector respecto de un sistema de coordenadas ortogonales *xyz* a los cosenos de los ángulos que el vector forma con el sentido positivo de los ejes coordenados. Los ángulos se toman entre 0º y 180º, de forma tal que los cosenos directores pueden ser positivos o negativos.

- *cosenos directores*: $\cos\alpha = \frac{v_1}{\|v\|}$, $\cos\beta = \frac{v_2}{\|v\|}$, $\cos\gamma = \frac{v_3}{\|v\|}$
- *ángulos directores:* α, β, γ

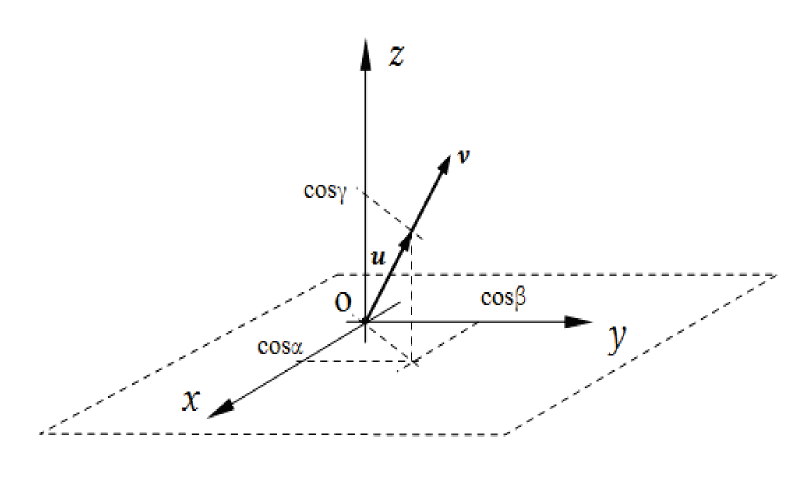


Figura 1.10

Entonces, el vector unitario o versor resulta: $\boldsymbol{u} = \left(\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}, \frac{v_3}{\|v\|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Siendo $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, se tiene:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

la cual constituye la relación fundamental que liga los cosenos directores de un vector en R^3.

✗ Ejercicio 1.8.

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección y el mismo sentido que $\boldsymbol{v}$=(4, -3). Represente gráficamente y verifique su respuesta.

✗ Ejercicio 1.9.

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección y el mismo sentido que $\boldsymbol{v}$=(2,-1,-2).

1.3.5 Componentes de un vector que no tiene punto inicial en el origen de coordenadas

Sea $\boldsymbol{v}$ cualquier vector no nulo en R^2, con punto inicial en $P_1(x_1, y_1)$ y punto terminal $P_2(x_2, y_2)$. Queremos conocer las componentes del vector $\boldsymbol{P_1P_2}$.

De la Figura 1.11 podemos observar que:

$\boldsymbol{OP_1}+\boldsymbol{P_1P_2}=\boldsymbol{OP_2}$

Es decir: $\boldsymbol{P_1P_2}=\boldsymbol{OP_2}-\boldsymbol{OP_1}$

Siendo $\boldsymbol{OP_2}=(x_2, y_2)$ y $\boldsymbol{OP_1}=(x_1, y_1)$,

el vector $\boldsymbol{P_1P_2}$ resulta:

$\boldsymbol{P_1P_2}=\boldsymbol{OP_2}-\boldsymbol{OP_1} = (x_2, y_2)-(x_1, y_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

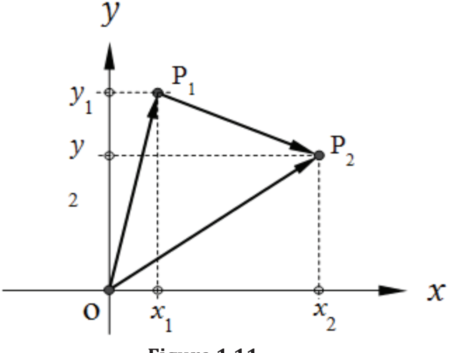


Figura 1.11

Sea $\boldsymbol{v}$ cualquier vector no nulo en R^3, con punto inicial en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y punto terminal $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Queremos conocer las componentes del vector $\boldsymbol{P_1P_2}$.

En la Figura 1.12 podemos observar que $\boldsymbol{OP_1}+\boldsymbol{P_1P_2}=\boldsymbol{OP_2}$ Es decir: $\boldsymbol{P_1P_2}=\boldsymbol{OP_2}-\boldsymbol{OP_1}$

Siendo $\boldsymbol{OP_2}=(x_2, y_2, z_2)$ y $\boldsymbol{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$, el vector $\boldsymbol{P_1P_2}$ resulta:

$\boldsymbol{P_1P_2}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

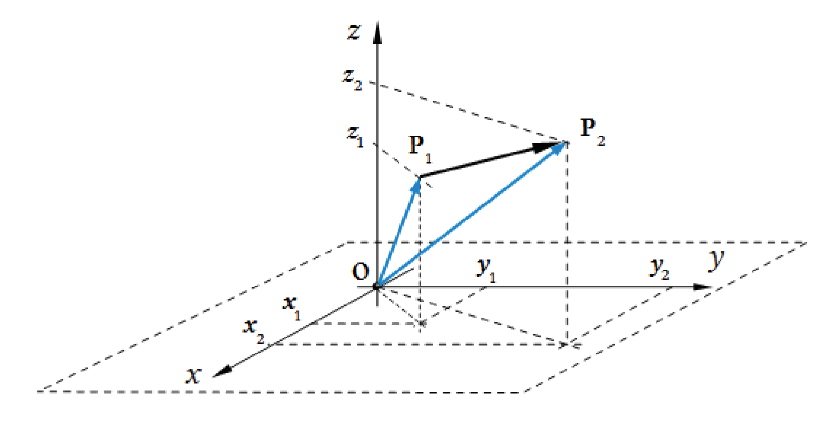


Figura 1.12

✘ Ejercicio 1.10.

Determine las componentes del vector $\boldsymbol{P_1P_2}$ y represente gráficamente:

a) $P_1=(-2, 2)$ $P_2=(0, -2)$
b) $P_1=(2, -1, 1)$ $P_2=(-3, 0, 2)$

1.3.6 Distancia entre dos puntos P_1 y P_2

En R^2 : La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es el módulo del vector $\boldsymbol{P_1P_2}$

$\boldsymbol{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$

$$d(P_1P_2) = \|P_1P_2\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En R^3: La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es el módulo del vector $\boldsymbol{P_1P_2}$

$\boldsymbol{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$$d(P_1P_2) = \| P_1P_2 \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

✘ Ejercicio 1.11.

En el ejercicio anterior, calcule la distancia entre P_1 y P_2 y determine luego un vector unitario en la dirección del vector $\boldsymbol{P_1P_2}$.

1.3.7 Producto Escalar

- Ángulo entre vectores

Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores no nulos en R^2 o en R^3. Supongamos que se han situado estos vectores de modo que sus puntos iniciales coincidan. El ángulo entre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es el ángulo θ determinado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ que satisface $0 \leq \theta \leq \pi$.

Definición: Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores en R^2 o en R^3, y θ el ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, entonces se define ***producto escalar***, *producto punto* o *producto euclidiano interior* como:

$\boldsymbol{u.v}=\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$ si $\boldsymbol{u \neq 0}$ y $\boldsymbol{v \neq 0}$
$\boldsymbol{u.v}=0$ si $\boldsymbol{u=0}$ o $\boldsymbol{v=0}$

Sean ***u*** y ***v*** dos vectores no nulos en R^2 o en R^3, entonces:

a) $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{v}\|^2$ es decir, $\|\boldsymbol{v}\|=(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v})^{1/2}$

b) Si ***u*** y ***v*** son vectores no nulos, y θ es el ángulo entre ellos, entonces:

- θ es agudo si y sólo si $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} > 0$
- θ es obtuso si y sólo si $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} < 0$
- $\theta = \pi/2$ si y sólo si $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = 0$

Entonces, por ejemplo, para los vectores unitarios canónicos en R^2:

$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}=\|\boldsymbol{i}\|^2=1$; $\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j}=\|\boldsymbol{j}\|^2=1$; $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}=0$; $\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i}=0$

• Propiedades del producto escalar (producto punto).

Sean ***u***, ***v*** y ***w*** vectores en R^2 o en R^3, y k un escalar, entonces:

- $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$
- $\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}.\boldsymbol{w}$
- $k(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})=(k\boldsymbol{u}).\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}.(k\boldsymbol{v})$
- $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}>0$, si $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}=0$, si $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$

• Producto escalar expresado en términos de las componentes de los vectores

En R^2: Sean $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2) = u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2) = v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}$

Evaluamos el producto escalar ***u.v*** y usamos las propiedades:

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}=(u_1\boldsymbol{i}+ u_2\boldsymbol{j}) . (v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j})=u_1v_1(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i})+ u_1v_2(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j})+ u_2v_1(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i})+ u_2v_2(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1(1)+ u_1v_2(0)+ u_2v_1(0)+ u_2v_2(1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1+ u_1v_2}$$

En R^3: Sean $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}$$

✗ Ejercicio 1.12.

Determine si el ángulo formado por ***u*** y ***v*** es agudo, obtuso o recto:

a) $\boldsymbol{u} = (2, 5)$ $\boldsymbol{v} =(-1, 3)$

b) $\boldsymbol{u} = (-2, 3)$ $\boldsymbol{v} =(4, 1)$

✗ Ejercicio 1.13.

a) Demuestre la expresión para el producto escalar en términos de componentes en R^3.

b) Halle el producto escalar ***u.v***, siendo ***u*** = (1, 1) y ***v*** = (0, 1).

c) Encuentre el ángulo entre ***u*** y ***v***.

1.3.7.1 Vectores paralelos

Definición: Dos vectores en R^2 o en R^3 son paralelos si el ángulo entre ellos es 0º o 180º.

Propiedad: Dos vectores en R^2 o en R^3 son paralelos si y sólo si uno de ellos es múltiplo escalar del otro. Es decir: $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$.

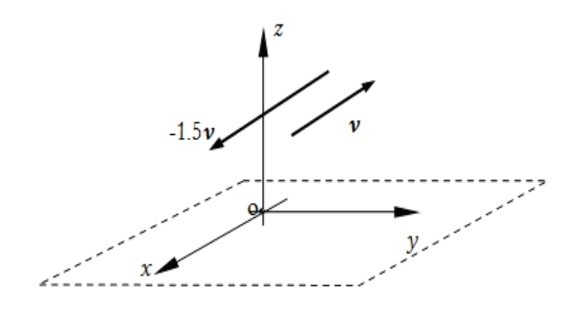


Figura 1.13.

✗ Ejercicio 1.14.

Muestre que los vectores dados son paralelos y represente gráficamente: ***u***=(2, -3) ***v***=(-4, 6)

1.3.7.2 Vectores ortogonales

Definición: Dos vectores en R^2 o en R^3 son ***ortogonales*** si el ángulo entre ellos es igual a 90º.

Propiedad: Dos vectores en R^2 o en R^3 son ortogonales si y sólo si su producto escalar es nulo. Es decir: ***u.v***=0

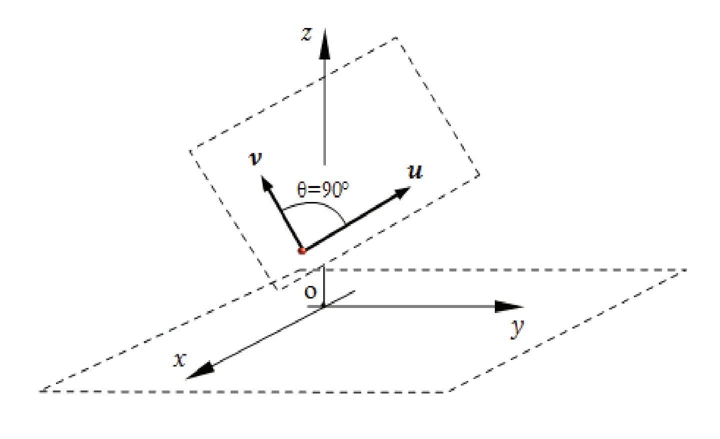


Figura 1.14.

✗ Ejercicio 1.15.

a) Muestre que los vectores ***u***=(3, -4) y ***v***=(4, 3) son ortogonales. Represente gráficamente.

b) Sean los vectores ***u***=(1, 3) y ***v***=(6, *a*). Determine el valor de *a*, de forma tal que ***u*** y ***v*** resulten ortogonales.

1.3.8 Proyección ortogonal de un vector sobre un eje

Dados un vector ***u*** y un eje *e* definido por el vector ***v***, se denomina proyección ortogonal del vector ***u*** sobre el eje *e* (o sobre la dirección de ***v***) a:

$\text{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|\cos\theta$

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|\,\text{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$

Es decir : (Figura 1.15)

$$\text{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

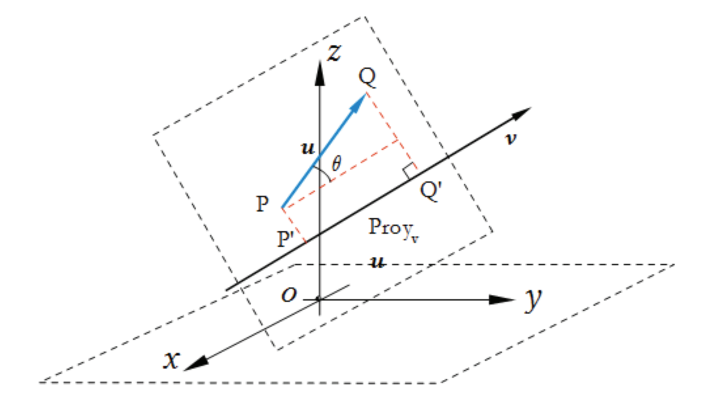


Figura 1.15.

El signo de $\text{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ será positivo si: $\theta < \pi/2$

El signo de $\text{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ será negativo si: $\theta > \pi/2$

$\text{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ también se denomina componente de ***u*** en la dirección de ***v***.

El ***vector proyección*** está dado por: (Figura 1.16)

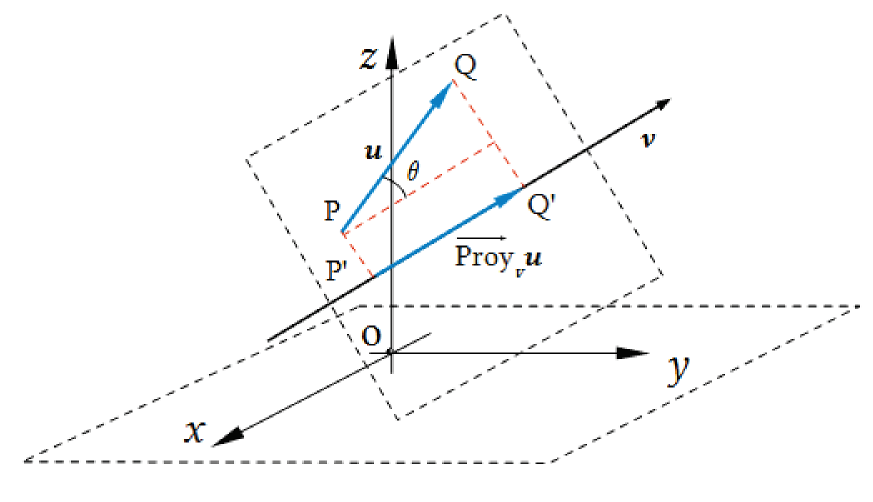


Figura 1.16.

$$\overrightarrow{\mathrm{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}} = \mathrm{Proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

Ejercicio 1.16.

a) Siendo ***u***=(2, 1) y ***v***=(-1, 1) calcule la componente de ***u*** en la dirección de ***v*** y determine el vector proyección. Represente gráficamente y verifique su respuesta.
b) Siendo ***u***=(2, 3, 1) y ***v***=(1, 2, -6) calcule la componente de ***u*** en la dirección de ***v*** y determine el vector proyección.

Ejercicio 1.17.

a) Los vectores ***u*** y ***v*** forman un ángulo de 120º. El módulo de ***u*** es 4. Determine el módulo de ***v*** para que (***u***+***v***) sea perpendicular a ***u***.
b) Halle (2***x***+3***u***).***w*** sabiendo que el módulo de ***w*** es 8, la proyección de ***u*** sobre ***w*** es 5 y que ***x*** es perpendicular a ***w***.

1.3.9 Base ortonormal

Definición: Se dice que un conjunto de 2 vectores de R^2 es una *base ortonormal* (BON) de R^2 si son dos vectores ortogonales y cada uno de ellos tiene módulo o norma 1.

Definición: Se dice que un conjunto de 3 vectores de R^3 es una ***base ortonormal*** (BON) de R^3 si es un conjunto ortogonal (todas las parejas de vectores son ortogonales) y cada vector tiene módulo o norma 1.

Cabe señalar que si se trata de un conjunto de 2 vectores de R^2 ortogonales entre sí, es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto es conjunto generador de R^2. Análogamente, si se trata de un conjunto de 3 vectores de R^3 ortogonales entre sí, es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto es conjunto generador de R^3.

Ejercicio 1.18.

Verifique que $S=\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es BON de R^3

a) $\boldsymbol{u}=(0, 1, 0)$; $\boldsymbol{v}=(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $\boldsymbol{w}=(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

b) $\boldsymbol{u}=(0, 1, 0)$; $\boldsymbol{v}=(-4/5, 0, 3/5)$; $\boldsymbol{w}=(3/5, 0, 4/5)$

1.3.10 Producto Vectorial

Definición: Se llama ***producto vectorial*** o ***producto cruz*** de dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de R^3, y se denota $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, al vector $\boldsymbol{w}$ que tiene, (Figura 1.17):
Módulo: $\|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \operatorname{sen}\theta$
Dirección: perpendicular al plano determinado por las direcciones de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$
Sentido: sentido de avance de un tornillo de rosca derecha cuando $\boldsymbol{u}$ rota hacia $\boldsymbol{v}$ un ángulo θ.

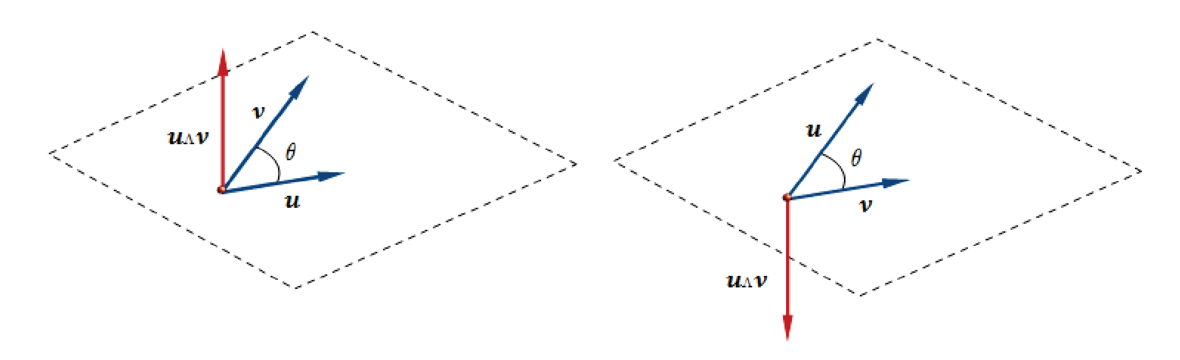


Figura 1.17.

Ejercicio 1.19.

a) En base a la definición de producto vectorial responda:

- Si en vez de considerar $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ se evalúa $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$. ¿Cómo son la dirección, el módulo y el sentido del nuevo vector respecto del anterior?
- ¿A qué es igual el producto vectorial de dos vectores que tienen la misma dirección?

- ¿A qué es igual el producto vectorial de un vector por sí mismo?

b) Evalúe los siguientes productos vectoriales de los versores fundamentales:

$\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$ $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{j}$ $\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{j}$ $\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{k}$

c) Demuestre que el área de un paralelogramo con vectores ***u*** y ***v*** como lados adyacentes es:
$A = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}\|$

Propiedades del producto vectorial (producto cruz).

Sean ***u, v*** y ***w*** vectores en R^3, y k un escalar, entonces:

- $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u})$
- $\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$
- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$
- $k(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge (k\boldsymbol{v})$
- $\boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Expresión del producto vectorial en términos de las componentes de los vectores.

Dados los vectores ***u*** y ***v*** expresados como:

$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\,\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\,\boldsymbol{j} + v_3\,\boldsymbol{k}$

Evaluamos a continuación el producto $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}) \wedge (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) =$$

$$= (u_1v_1)(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}) + (u_1v_2)(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}) + (u_1v_3)(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{k}) + (u_2v_1)(j \wedge \boldsymbol{i}) + (u_2v_2)(\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{j}) +$$

$$+ (u_2v_3)(\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}) + (u_3v_1)(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i}) + (u_3v_2)(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{j}) + (u_3v_3)(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{k}) =$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\boldsymbol{k}$$

Recordando la regla para desarrollar determinantes, verifique que la relación recién obtenida se puede escribir como:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.20.

Dados los vectores $\boldsymbol{u}$=(2, 1, -3) y $\boldsymbol{v}$=(-4, 5, 2), evalúe:

a) $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$
b) $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$
c) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$
d) Determine si el ángulo que forman ***u*** y ***v*** es agudo, obtuso o recto.
e) Evalúe el área del paralelogramo que determinan los vectores ***u*** y ***v.***

1.3.11 Producto Mixto

Definición: Se llama ***producto mixto*** de tres vectores ***u***, ***v*** y ***w*** de R^3, al producto escalar de $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, por ***w***, es decir, $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$

Consideremos los vectores ***u***, ***v*** y ***w*** expresados como:

$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{w}=w_1\boldsymbol{i}+w_2\boldsymbol{j}+w_3\boldsymbol{k}$

Evaluamos a continuación el producto mixto $(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$:

$$(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}= ((u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{k}).(w_1\boldsymbol{i}+w_2\boldsymbol{j}+w_3\boldsymbol{k})=$$
$$= (u_2v_3-u_3v_2)w_1+(u_3v_1-u_1v_3)w_2+(u_1v_2-u_2v_1)w_3$$

Ejercicio 1.21.

a) Verifique que el resultado anterior es precisamente el desarrollo del determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

b) Evalúe el producto mixto de los tres vectores canónicos.

c) ¿A qué es igual el producto mixto de tres vectores paralelos a un mismo plano?

- **Propiedades del producto mixto.**

Sean ***u***, ***v*** y ***w*** vectores en R^3, entonces:

- $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$
- $\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}.(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})=0$
- Si ***u***, ***v*** y ***w*** son tres vectores que NO están situados en el mismo plano, el valor absoluto del producto mixto $(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$, es igual al volumen del paralelepípedo construído sobre los mismos, una vez llevados a un origen común, tal como indica

la Figura 1.18, siendo el área de la base el módulo del producto vectorial $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ y la altura, la proyección del vector $\boldsymbol{w}$, en la dirección de $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$

- Tres vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son *coplanares,* o *paralelos* al mismo plano, si y sólo si su producto mixto es nulo.

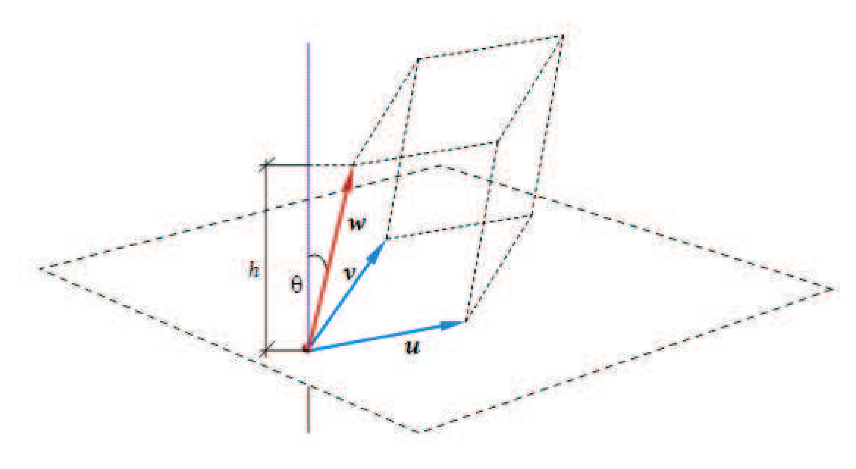


Figura 1.18.

Ejercicio 1.22.

Demuestre que si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son tres vectores que NO están situados en el mismo plano, el valor absoluto del producto mixto $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$, es igual al volumen del paralelepípedo construído sobre los mismos, una vez llevados a un origen común.

✘ Respuesta Ejercicio 1.22.

El volumen del paralelepípedo se calcula a partir del producto del área de la base por la altura del mismo. Es decir, Vol=A h . Pero el área de la base es el módulo del vector resultado del producto vectorial $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$. Es decir, A=$\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|$. La altura está dada por: h=$\|\boldsymbol{w}\| \, |cos\theta|$. Entonces el volumen resulta:

Vol=A h==$\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| \|\boldsymbol{w}\| \, |cos\theta|$

Esta expresión coincide con el valor absoluto del producto escalar entre los vectores $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ y $\boldsymbol{w}$.

Por lo tanto: Vol = $|(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}|$

Ejercicio 1.23.

Sean los vectores $\boldsymbol{u}$=(1, 0, 1), $\boldsymbol{v}$=(2, 1, -1) y $\boldsymbol{w}$ = (0, 1, 1) :

a) Evalúe $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$

b) Evalúe $\boldsymbol{u} \, . \, \boldsymbol{v}$

c) Evalúe $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$

Ejercicio 1.24.

Sean P (0, -3, 2), Q (-1, 1, 2) y R (7, 1, -1), tres vértices de un paralelogramo PQRS :

a) Halle el punto S.

b) Calcule el área del paralelogramo PQRS.

Ejercicio 1.25.

Verifique usando propiedades:
a) $(3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \wedge (\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v})=5(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u})$
b) $2(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})=(2\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}.\boldsymbol{u})$

Ejercicio 1.26.

Dado el vector $\boldsymbol{u}$ = (0 ,- 1, 1)

a) Determine los ángulos directores.
b) Determine un vector $\boldsymbol{b}$ que sea perpendicular simultáneamente al vector $\boldsymbol{u}$ y al versor $\boldsymbol{i}$ = (1,0,0) y tal que $\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}$ = 8, siendo $\boldsymbol{a}$ = (1,2,2).
c) Evalúe el producto mixto ($\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{i}$) . $\boldsymbol{u}$
d) Indique, justificando su respuesta, si {$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{a}$} es conjunto linealmente dependiente o linealmente independiente.

✘ Respuesta Ejercicio 1.26.

a) Dado $\boldsymbol{u}$ = (0, -1,1), debemos hallar el versor $\breve{\boldsymbol{u}}$ ya que sus componentes serán los cosenos de los ángulos directores buscados:

$$\breve{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

Por lo tanto tendremos:

$$\alpha = \text{arc cos } 0 = \frac{\pi}{2} \qquad \beta = \text{arc cos}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3\pi}{4} \qquad \gamma = \text{arc cos}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

b) Una forma de resolución es la siguiente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \wedge \breve{\boldsymbol{i}} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{i}} & \breve{\boldsymbol{j}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 1) \\ \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{u} \wedge \breve{\boldsymbol{i}}) = k(0, 1, 1) \end{cases}$$

Planteamos la condición $\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}$ = 8, siendo $\boldsymbol{b} = k(0, 1, 1)$:

k[(0, 1, 1) . (1, 2, 2)] = 8

Por lo tanto: k = 2. Y resulta:

$\boldsymbol{b}$ = (0, 2, 2)

c)

$$(\boldsymbol{a} \wedge \breve{\boldsymbol{i}}).\boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

d) Una forma de resolución es la siguiente:

$\boldsymbol{0} = k_1\, \boldsymbol{u} + k_2\, \boldsymbol{\check{\imath}} + k_3\, \boldsymbol{a}$

$(0, 0, 0) = k_1(0, -1, 1) + k_2(1, 0, 0) + k_3(1, 2, 2)$

$$\begin{cases} 0k_1 + \ \ k_2 + \ \ k_3 = 0 \\ -k_1 + 0k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + 0k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución única: $k_1=0$; $k_2=0$; $k_3=0$.
Es decir, la combinación lineal de los vectores dados que brinda por resultado el vector nulo es aquella en la cual los tres escalares son únicamente nulos, por lo tanto los vectores son linealmente independientes (LI).

Otra forma de resolución es la siguiente:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{\check{\imath}}).\boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

El producto mixto de los vectores dados es distinto de 0, por lo cual los vectores no son coplanares y son linealmente independientes (LI).

1.4 LUGARES GEOMÉTRICOS

Las operaciones vectoriales que hemos estudiado en esta unidad nos ayudarán a estudiar en el siguiente capítulo, los contenidos referidos a planos y rectas, para lo cual utilizaremos el concepto de lugar geométrico (L.G.).

> **Definición**: ***Lugar geométrico*** en R^2 (o en R^3), es el conjunto de puntos del plano (o del espacio) que cumplen una determinada condición.

La ecuación del lugar geométrico es una ecuación del tipo $f(x,y)=0$, (o $f(x,y,z)=0$), que representa las condiciones algebraicas que deben cumplir las coordenadas de los puntos de dicho lugar geométrico.

Ejemplo:

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La ecuación de una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y equidistancia r llamada radio es:

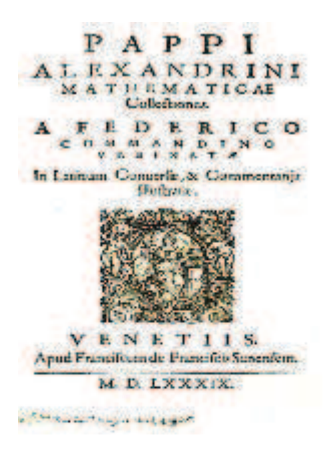
$x^2+y^2=r^2$

1.5 ACTIVIDADES DE REPASO Y AUTOEVALUACIÓN

- Defina los conceptos de espacio vectorial y subespacio vectorial.
- Defina los conceptos de: combinación lineal, conjunto generador, conjunto linealmente dependiente y conjunto linealmente independiente.
- Defina los conceptos de base y dimensión.
- Defina el concepto de coordenadas de un vector respecto de una base dada.
- Defina la operación producto escalar entre vectores y enuncie sus propiedades.
- Defina la operación producto vectorial entre vectores y enuncie sus propiedades.
- Defina la operación producto mixto entre vectores y enuncie sus propiedades.
- Vincule los conceptos de conjunto linealmente independiente y conjunto linealmente dependiente, con las condiciones de nulidad o no en las operaciones de producto escalar, producto vectorial y producto mixto.
- Demuestre que el valor absoluto del producto mixto de tres vectores que no están situados en el mismo plano, $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$, es igual al volumen del paralelepípedo que generan dichos vectores, una vez llevados a un origen común.

Capítulo 2:

Planos y Rectas


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum Conuersae, & Commentarijs
Illustratae.

VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

"Las abejas, en virtud de una cierta intuición geométrica, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo y que podrá contener más miel con el mismo material"

Pappi de Alejandría

2.1 INTRODUCCIÓN

Con los contenidos desarrollados en el capítulo anterior, estamos en condiciones de abordar el estudio de planos y rectas, ya que con ayuda de los vectores podremos encontrar las ecuaciones de estos lugares geométricos y resolver problemas tales como la determinación de posiciones relativas entre ellos, ángulos y distancias.

Existe una amplia variedad de aplicaciones de estos contenidos en disciplinas tales como física, matemática, ingeniería, arquitectura, entre otras. Por ejemplo, en las etapas de diseño, cálculo y reparación de distintos componentes estructurales, máquinas, equipos y obras de ingeniería y arquitectura en general, surge la necesidad de determinar distancias, ángulos, proyecciones entre rectas,

entre planos, entre rectas y planos, y de definir posiciones relativas entre dichos lugares geométricos.

En este capítulo plantearemos distintas formas de escribir la ecuación de un plano y estudiaremos las posiciones relativas entre dos o más planos. Obtendremos expresiones que permiten calcular el ángulo entre planos y la distancia entre un punto y un plano. Plantearemos distintas formas de escribir la ecuación de una recta en el espacio y estudiaremos las posiciones relativas entre rectas en el espacio. Asimismo deduciremos expresiones que permiten calcular el ángulo entre rectas y la distancia entre un punto y una recta, y entre dos rectas.

Para el desarrollo del presente capítulo es requisito previo el estudio del Capítulo 1: *Espacios Vectoriales* y *Vectores Geométricos.* El trabajo en el espacio realizado, se verá complementado con el estudio del Capítulo 5: *Superficies.*

Se incluyen en forma adicional, algunas actividades de repaso y autoevaluación, con lo que se busca que el estudiante realice una valoración de su propia marcha en el proceso de aprendizaje, detectando por sus propios medios aquellos temas en los cuales pueda existir algún tipo de dificultad o duda y pueda corregir o revisar oportunamente los conceptos que sean necesarios.

2.2 PLANOS

2.2.1 Ecuaciones de planos

2.2.1.1 Ecuación del plano conocidos un vector normal y un punto

Se puede hallar la ecuación de un plano π, si se conoce un vector perpendicular al plano y un punto que pertenece a él, según se observa en la Figura 2.1.

<u>Datos</u>:
$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$
Punto del plano π

$\boldsymbol{n}_\pi=(A, B, C)$
Vector normal a π
$\boldsymbol{n}_\pi \neq \boldsymbol{0}$

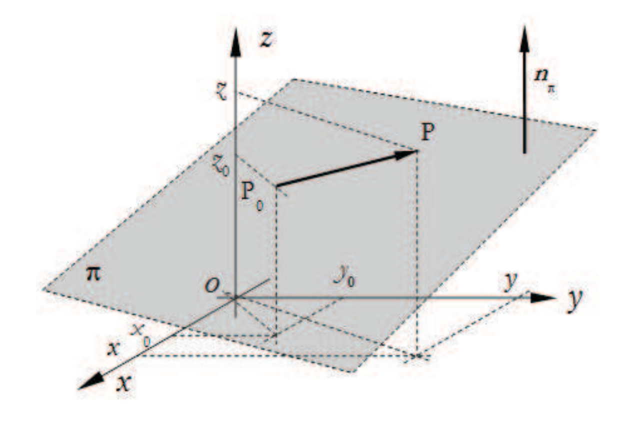


Figura 2.1.

> **Definición:** Un ***plano*** de R^3 de vector normal $\boldsymbol{n}_\pi$ no nulo y que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y, z)$, tales que el vector $\boldsymbol{P_0P}$ es perpendicular a $\boldsymbol{n}_\pi$.

. ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

Sean: $\boldsymbol{n}_\pi = (A,B,C)$ $\quad$ $\boldsymbol{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$\boldsymbol{P_0P}$ es perpendicular a $\boldsymbol{n}_\pi$ $\quad$ Por ser $\boldsymbol{n}_\pi$ un vector normal al plano.

Entonces podemos plantear que el producto escalar entre dichos vectores es nulo. Es decir:

$$\boldsymbol{P_0P} \cdot \boldsymbol{n}_\pi = 0$$ Ecuación vectorial del plano

. ECUACIÓN GENERAL CARTESIANA DEL PLANO

Sustituyendo en la ecuación anterior los vectores en términos de sus componentes, resulta:

$\boldsymbol{P_0P} \cdot \boldsymbol{n}_\pi = 0$

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0).(A, B, C)=0$

Luego :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$ Forma punto normal de la ecuación del plano

Que también puede escribirse como:

$$Ax+By+Cz+D=0$$ Ecuación general del plano

donde $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

Esta ecuación se denomina ***ecuación general del plano***, ecuación cartesiana o ecuación estándar del plano.

✘ Ejercicio 2.1.

Reflexionar y resolver

¿Cuáles son las ecuaciones de los planos coordenados?

✘ Respuesta Ejercicio 2.1.

El plano coordenado xy pasa por el origen de coordenadas y cualquier vector paralelo al eje z es perpendicular a él. En particular, el versor $\boldsymbol{k}$ =(0, 0, 1)

Aplicamos la forma punto normal de la ecuación del plano, considerando el vector normal $\boldsymbol{n}_\pi$ =(0, 0, 1) y (x_0, y_0, z_0)=(0,0,0). Podemos entonces escribir:

$$0.(x-0)+0.(y-0)+1.(z-0)=0$$

Por lo tanto, la ecuación del plano xy es:

$$z = 0$$

De forma análoga obtenga las ecuaciones correspondientes a los planos coordenados xz e yz, que son y=0 y x=0 respectivamente.

. FORMA SEGMENTARIA DE LA ECUACIÓN DEL PLANO

Dada la ecuación $Ax+By+Cz+D=0$, sabemos que los coeficientes A, B y C de las variables x, y, z, constituyen una terna de números reales llamados ***números directores*** que determinan la dirección de una recta perpendicular al plano y que se definirá más adelante.

Siendo D no nulo, dividimos ambos miembros de dicha ecuación por $(-D)$ y resulta la denominada ***forma segmentaria*** de la ecuación del plano:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

donde:

$$a = -\frac{D}{A} \quad ; \quad b = -\frac{D}{B} \quad ; \quad c = -\frac{D}{C}$$

✘ Ejercicio 2.2.

Encuentre la ecuación general y la ecuación segmentaria del plano π que pasa por el punto Q(1, -1, 5) y tiene como vector normal $\boldsymbol{n}_\pi$=(3, 1, -1), (ver Figura 2.2).

✘ Respuesta Ejercicio 2.2.

En primer lugar hallaremos la ecuación del plano en su forma vectorial. Para ello consideramos con los siguientes vectores:

$\boldsymbol{n}_\pi=(A, B, C)$ Vector normal al plano π

$\boldsymbol{P}_o\boldsymbol{P}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ Vector contenido en el plano π

Por definición de plano, ambos vectores son perpendiculares entre sí, por lo cual podemos plantear que el producto escalar de ambos es nulo. Es decir:

$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}.\boldsymbol{n}_\pi=0$

$(x-1, y+1, z-5).(3, 1, -1)=0$

$3(x-1)+1(y+1)+(-1)(z-5)=0$

A partir de la forma punto normal de la ecuación del plano, desarrollando y agrupando términos tendremos: $3x-3+y+1-z+5=0$.

Es decir:

$3x+y-z+3=0$

Además podemos escribir:

$$-\left(\frac{x}{1}\right)-\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$$

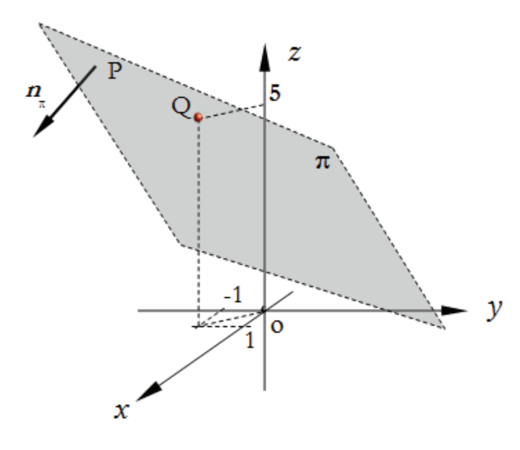


Figura 2.2.

Otra forma alternativa para encontrar la ecuación general del plano es la siguiente:

A partir de la ecuación $Ax+By+Cz+D=0$, y sustituyendo las componentes del vector normal se obtiene:

$3x+1y-1z+D=0$

Para obtener el valor del término independiente D, consideramos que el punto Q $(1, -1, 5) \in \pi$. Es decir, las coordenadas del punto Q satisfacen la ecuación del plano y por lo tanto:

$3.1+1.(-1)-1.5+D=0$

$3-1-5+D=0$

D=3

Por lo tanto, la ecuación del plano es:

$3x+y-z+3=0$

✘ Ejercicio 2.3.

¿Cómo podría determinar las coordenadas de un punto R que pertenece al plano π del ejercicio anterior?

✘ Respuesta Ejercicio 2.3.

Las coordenadas de un punto R(x, y, z), que pertenece al plano π, deben satisfacer cualquiera de las ecuaciones del plano. Elegimos dos de coordenadas y determinamos la tercera, a partir de la ecuación del plano elegida para trabajar.

La ecuación general del plano es la siguiente:

$3x+y-z+3=0$

Elegimos las coordenadas x e y, por ejemplo: x=-1 y=2

Tendremos reemplazando en la ecuación: $3(-1)+2-z+3=0$

Es decir: $z=2$

Por lo tanto el punto R, que tiene por coordenadas R(-1, 2, 2) pertenece al plano π.

✘ Ejercicio 2.4.

A partir de la ecuación general cartesiana del plano $Ax+By+Cz+D=0$, complete los siguientes enunciados, de modo tal que resulten verdaderos.

Si D=0	$Ax+By+Cz=0$	El plano π pasa por:	
Si A=0	$By+Cz+D=0$	El plano π es perpendicular al plano:	
Si B=0	$Ax+Cz+D=0$	El plano π es perpendicular al plano:	
Si C=0	$Ax+By+D=0$	El plano π es perpendicular al plano:	
Si A=B=0	$Cz+D=0$	El plano π es paralelo al plano:	
Si A=C=0	$By+D=0$	El plano π es paralelo al plano:	
Si B=C=0	$Ax+D=0$	El plano π es paralelo al plano:	

2.2.1.2 Ecuaciones del plano dados dos vectores paralelos al plano y un punto del mismo

Se puede hallar la ecuación de un plano π, si se conocen dos vectores linealmente independientes, que sean paralelos al plano y un punto que pertenece a él (Figura 2.3).

Datos:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ Punto del plano π. ***u***, ***v*** Vectores paralelos al plano π linealmente independientes.

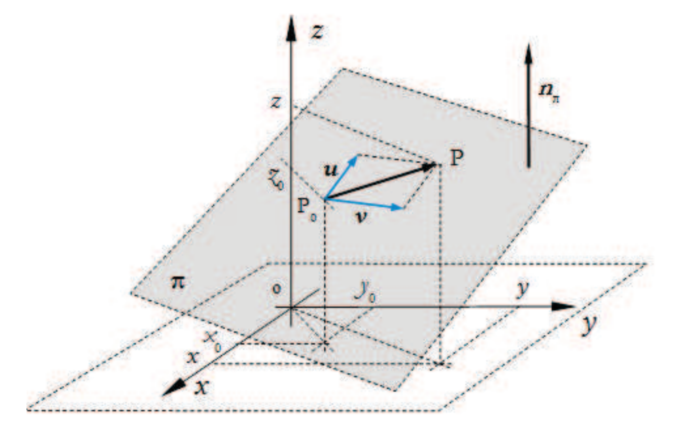


Figura 2.3.

> **Definición:** Un ***plano*** en R^3 paralelo a dos vectores ***u*** y ***v***, linealmente independientes y que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector $\boldsymbol{P_0P}$ se puede escribir como combinación lineal de ***u*** y ***v***.

Es decir:

$\boldsymbol{P_0P} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$ con k_1 y $k_2 \in R$.

Sustituyendo en esta ecuación:

$\boldsymbol{P_0P} = \boldsymbol{OP} - \boldsymbol{OP_0}$

se obtiene:

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OP_0} + k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v} \quad \text{con } k_1 \text{ y } k_2 \in R$$

Esta ecuación se denomina ***ecuación vectorial paramétrica*** del plano. En la misma k_1 *y* k_2 son parámetros que pueden tomar cualquier valor real. La elección de valores específicos para dichos parámetros nos permite identificar un vector ***OP*** tal que P es punto del plano en estudio.

Considerando las componentes de cada uno de los vectores, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+k_1(u_1, u_2, u_3)+k_2(v_1, v_2, v_3) \quad k_1 \text{ y } k_2 \in R$$

La ecuación obtenida se denomina *ecuación vectorial paramétrica* del plano *en términos de sus componentes.*

Igualando componente a componente, en la ecuación vectorial paramétrica del plano, se obtiene:

$$\begin{cases} x = x_0 + k_1 u_1 + k_2 v_1 \\ y = y_0 + k_1 u_2 + k_2 v_2 \\ z = z_0 + k_1 u_3 + k_2 v_3 \end{cases} \qquad k_1 \text{ y } k_2 \in R$$

Las 3 ecuaciones obtenidas se denominan *ecuaciones cartesianas paramétricas* del plano. Si se eliminan los parámetros k_1 y k_2 de las ecuaciones cartesianas paramétricas, se obtiene la ecuación cartesiana o general del plano, que ya hemos estudiado.

✘ Ejercicio 2.5.

Determine las ecuaciones de los siguientes planos:

a) Ecuación vectorial paramétrica del plano π que pasa por el punto Q(1,-1,5) y es paralelo a los vectores $\boldsymbol{u} = (3, 0, 2)$ y $\boldsymbol{v} = (-1,4,2)$.

b) Ecuación cartesiana (o general del plano), eliminando los parámetros correspondientes de las ecuaciones cartesianas paramétricas.

✘ Respuesta Ejercicio 2.5.

a) $$(x, y, z) = (1,-1, 5) + k_1(3, 0, 2) + k_2(-1, 4, 2) \qquad k_1 \text{ y } k_2 \in R$$

b) $$\begin{cases} x = 1 + 3k_1 - k_2 \\ y = -1 + 4k_2 \\ z = 5 + 2k_1 + 2k_2 \end{cases}$$

Despejando y reemplazando obtendremos:

$k_2 = (y+1)/4$	$z = 5 + 2k_1 + 2(y+1)/4$	$x = 1 + 3k_1 - (y+1)/4$
	$z = 5 + 2k_1 + (y+1)/2$	$4x = 3 + 12k_1 - y$
	$2z = 11 + 4k_1 + y$	$12k_1 = 4x - 3 + y$
	$6z = 33 + 12k_1 + 3y$	$12k_1 = 6z - 3y - 33$

Es decir:

$4x-3+y=6z-33-3y$

Luego: $2x+2y-3z+15=0$ Ecuación *general* del plano.

✘ Ejercicio 2.6.

Dado un plano π_1 expresado por medio de su ecuación vectorial paramétrica:

$(x, y, z)=(0, 0, 0)+t_1(1, 2, 3)+t_2(-2, 1, 0)$; t_1 y $t_2 \in R$

a) Halle la ecuación cartesiana paramétrica del plano dado.

b) Encuentre la ecuación general de ese plano a partir de la ecuación dada, siguiendo dos caminos diferentes.

✘ Respuesta Ejercicio 2.6.

a) $\begin{cases} x=t_1-2t_2 \\ y=2t_1+t_2 \\ z=3t_1 \end{cases}$ t_1 y $t_2 \in R$

b) Procedimiento 1: Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales dado por las ecuaciones cartesianas paramétricas de manera de encontrar los valores de t_1 y t_2 :

De la tercera ecuación*:* $t_1=z/3$

De la segunda*:* $t_2=y-2/3\ z$

En la primera ecuación*:* $x=1/3\ z-2y+4/3\ z$

De donde obtenemos*:* $x+2y-5/3\ z=0$ Ecuación *general* del plano dado

Procedimiento 2: Otra forma de determinar la ecuación general del plano, es a partir de la evaluación del producto vectorial de los vectores paralelos al mismo, indicados en la ecuación vectorial paramétrica. Este cálculo nos brinda como resultado un vector normal al plano dado. Es decir:

$\boldsymbol{n}_\pi=(1, 2, 3)\wedge(-2, 1, 0)=(-3, -6, 5)$

Escribiendo la ecuación punto normal tendremos:

$-3(x-0)-6(y-0)+5(z-0)=0$

$-3x-6y+5z=0$

Esta última constituye la ecuación general del plano. Una alternativa es dividir toda la expresión por (-3), con lo que obtenemos otra forma de la ecuación general del mismo plano:

$x+2y-5/3\ z=0$	Ecuación *general* del plano dado.

2.2.1.3 Ecuaciones del plano conocidos tres puntos

Tres puntos que no son colineales determinan un plano, ya que definen dos vectores no paralelos, con un punto de origen en común.

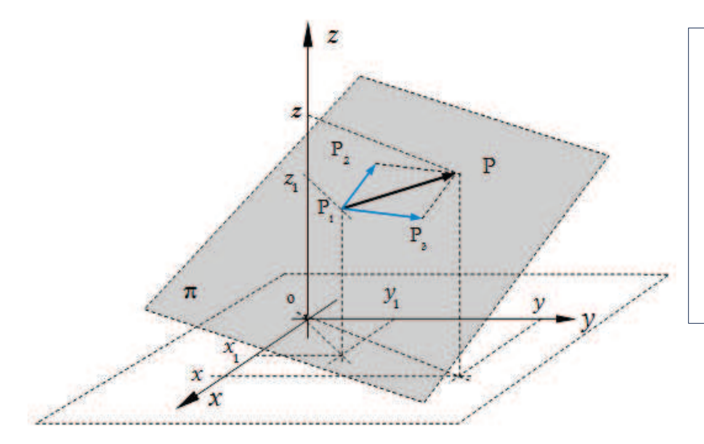


Figura 2.4.

Datos:

$P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ Punto del plano π

$P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ Punto del plano π

$P_3\ (x_3, y_3, z_3)$ Punto del plano π

Definición: Un ***plano*** en R^3 determinado por tres puntos no colineales P_1, P_2, P_3, es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector $\boldsymbol{P_1P}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{P_1P_2}$ y $\boldsymbol{P_1P_3}$.

A continuación determinaremos la ecuación del plano que pasa por los puntos P_1, P_2 y P_3 no colineales.

$P_1\ (x_1, y_1, z_1)$; $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$; $P_3\ (x_3, y_3, z_3)$

1º) Determinamos las componentes de los vectores $\boldsymbol{P_1P_2}$ y $\boldsymbol{P_1P_3}$

$\boldsymbol{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$; $\boldsymbol{P_1P_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

2º) Evaluamos el vector $\boldsymbol{n_\pi} = \boldsymbol{P_1P_2} \wedge \boldsymbol{P_1P_3}$

3º) Escribimos la ecuación del plano de vector normal $\boldsymbol{n_\pi}$ y que pasa por el punto P_1 (o por el punto P_2, o por el punto P_3).

$\boldsymbol{P_1P} . \boldsymbol{n_\pi}=0$

En forma alternativa, sustituyendo la expresión para el vector normal $\boldsymbol{n_\pi}$, es posible escribir la ecuación del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3 planteando la condición de producto mixto nulo, es decir:

$\boldsymbol{P_1P} . \boldsymbol{P_1P_2} \quad \boldsymbol{P_1P_3} = 0$

✘ Ejercicio 2.7.

Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos:
S(1, 2, -1); Q(2, 3, 0); R(-1, 0, 1)

✘ Respuesta Ejercicio 2.7.

1º) Determinamos los vectores ***SQ*** y ***SR***

SQ=(1, 1, 1); ***SR***=(-2,-2, 2)

2º) Evaluamos el vector $\boldsymbol{n_\pi} = \boldsymbol{SQ} \wedge \boldsymbol{SR}$

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{n_\pi} = \boldsymbol{SQ} \wedge \boldsymbol{SR} = (4, -4, 0)$

3º) Escribimos la ecuación del plano de vector normal $\boldsymbol{n_\pi}=(4, -4, 0)$ y que pasa por el punto S (o por el punto Q, o por el punto R).

$\boldsymbol{SP} . \boldsymbol{n_\pi}=0$

$(x-1, y-2, z+1).(4, -4, 0)=0$

$4x-4y+4=0$ Ecuación *general* (o cartesiana) del plano.

Que también puede escribirse como: $x-y+1=0$

El plano que pasa por los tres puntos dados es un plano perpendicular al plano *xy*.

✘ Ejercicio 2.8.

Dado un plano que pasa por los puntos Q_1, Q_2, Q_3 de coordenadas conocidas, encuentre la ecuación general del mismo.

Datos del problema:

$Q_1\ (1, 3, -2) \in \pi$

Q_2 (2, 1, 2) $\in \pi$

Q_3 (1, 0, 3) $\in \pi$

✘ Respuesta Ejercicio 2.8.

Partiendo de la ecuación general del plano, $Ax+By+Cz+D=0$ y suponiendo A no nulo, podemos escribir: $x+\beta y+\gamma z+\delta=0$

Reemplazando en la expresión encontrada, las coordenadas de los tres puntos datos queda formado un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 1+3\beta-2\gamma+\delta=0 \\ 2+\beta+2\gamma+\delta=0 \\ 1+0\beta+3\gamma+\delta=0 \end{cases}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones nos lleva a encontrar los valores de las incógnitas

$\beta = -5/2$
$\gamma = -3/2$
$\delta = 7/2$

Luego reemplazamos las mismas en la ecuación $x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, y obtenemos:

$x-5/2\,y-3/2\,z+7/2=0$

Es decir :

$2x-5y-3z+7=0$	Ecuación *general* del plano.

Otra forma de resolver el problema, es trabajar con los tres puntos dados y obtener dos vectores que pertenezcan al plano buscado:

$\boldsymbol{Q_1Q_2}=(1,-2, 4)$
$\boldsymbol{Q_1Q_3}=(0,-3, 5)$

Realizando el producto vectorial entre ambos, obtenemos el vector normal al plano:

$\boldsymbol{Q_1Q_2} \wedge \boldsymbol{Q_1Q_3} = (2, -5, -3) = \boldsymbol{n}_\pi$

Para hallar D reemplazamos en la ecuación general las coordenadas de uno de los puntos datos Q_3:

$2x-5y-3z+D=0$
$2.1-0-3.3+D=0$
$2-9+D=0$

$D=7$

Luego, la ecuación del plano resulta:

$2x - 5y - 3z + 7 = 0$

2.2.2 Distancia de un punto a un plano

Datos:

P_0 (x_0, y_0, z_0) Punto $\notin \pi$
Ecuación del plano π
$Ax + By + Cz + D = 0$

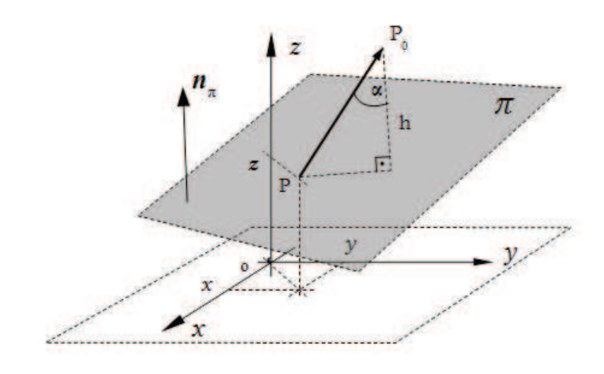


Figura 2.5.

De acuerdo a la figura 2.5:

$h = \|\boldsymbol{PP_0}\|\ |\cos\alpha|$

Por definición de producto escalar:

$\boldsymbol{PP_0} \cdot \boldsymbol{n_\pi} = \|\mathbf{PP_0}\|\ \|\mathbf{n_\pi}\| \cdot \cos\alpha$

Entonces :

$$h = \frac{|\boldsymbol{P_0P} \cdot \boldsymbol{n_\pi}|}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|}$$

Evaluemos el numerador de la expresión anterior :

$\boldsymbol{PP_0} \cdot \boldsymbol{n_\pi} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot (A, B, C)$

$\boldsymbol{PP_0} \cdot \boldsymbol{n_\pi} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz)$

$\boldsymbol{PP_0} \cdot \boldsymbol{n_\pi} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$

Por lo tanto la expresión que permite calcular la distancia h de un plano a un punto P_0 exterior a él, resulta:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

✘ Ejercicio 2.9.

¿Cuál es la expresión que permite evaluar la distancia de un plano cualquiera, al origen de coordenadas?

✘ Respuesta Ejercicio 2.9.

Si P_0 (0, 0, 0), la expresión anterior resulta:

$$h = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

. TRAZAS

Denominamos ***trazas***, a las curvas de intersección de una superficie cualquiera con cada uno de los planos coordenados.

En el caso de las superficies planas o planos, las trazas son rectas. Por ejemplo, la traza con el plano *xy* , cuya ecuación es *z*=0, se plantea como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ z=0 \end{cases}$$

✘ Ejercicio 2.10.

Encuentre los planos y trazas indicados en los incisos siguientes:

a) Determine la ecuación del plano π cuyo vector normal es $\boldsymbol{n_\pi}$=(1,-2,-3) y que pasa por *J* (1, 5, 4).

b) Halle la traza del plano dado con el plano *yz*. Represente gráficamente.

c) Encuentre los planos π’ paralelos al plano π del inciso anterior, tales que la distancia de π’ a π sea igual a 5 unidades.

2.2.3 Otra forma geométrica de visualizar el plano

Sea la ecuación general del plano *Ax*+*By*+*Cz*+*D*=0.
Un vector normal al plano π está dado por $\boldsymbol{n_\pi}=(A, B, C)$.
Consideraremos un vector $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{OP}=(x, y, z)$ que tiene origen en el origen de coordenadas y extremo en un punto cualquiera P del plano dado (ver Figura 2.6).
El producto $\boldsymbol{n_\pi} \cdot \boldsymbol{u}$ resulta:

$$\boldsymbol{n_\pi} \cdot \boldsymbol{u} = Ax+By+Cz$$

Entonces, posible escribir la ecuación general del plano de la siguiente manera:

$\boldsymbol{n}_\pi.\boldsymbol{u}=-D$

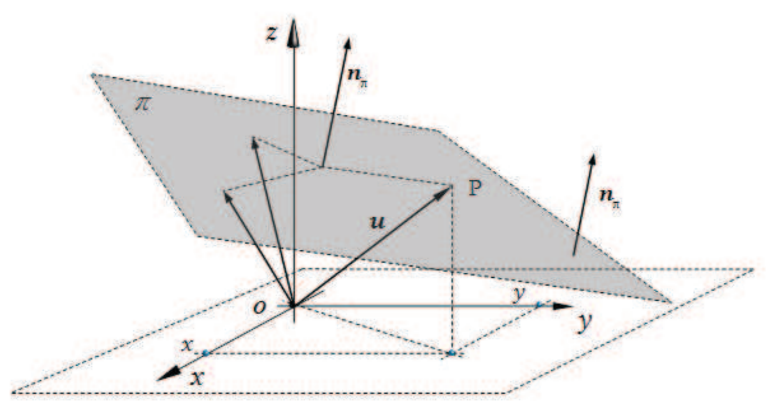


Figura 2.6.

Dividiendo miembro a miembro esta última ecuación por el módulo del vector normal al plano, ya que éste es no nulo, tendremos:

$$\frac{\boldsymbol{n}_\pi.\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{n}_\pi\|}=\frac{-D}{\|\boldsymbol{n}_\pi\|}$$

Recordando el concepto de vector proyección, reconocemos que el primer miembro de esta ecuación es la componente del vector $\boldsymbol{u}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{n}_\pi$. Por lo tanto, podemos interpretar de la siguiente manera:

Un plano es el conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{u}$ tales que la componente de $\boldsymbol{u}$ en la dirección de $\boldsymbol{n}_\pi$ es:

$$\frac{-D}{\|\boldsymbol{n}_\pi\|}$$

También observamos que esta expresión, tomada en valor absoluto, es la distancia del origen de coordenadas al plano dado.

2.2.4 Posiciones relativas entre planos

Buscamos ahora determinar la posición relativa entre dos planos.

Datos:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ Ecuación general del plano π_1

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ Ecuación general del plano π_2

2.2.4.1 Planos Paralelos

Definición: Dos planos son *paralelos* si y sólo si sus vectores normales son paralelos. Es decir: $\boldsymbol{n}_{\pi 1} = k\boldsymbol{n}_{\pi 2}$ donde $k \in R$

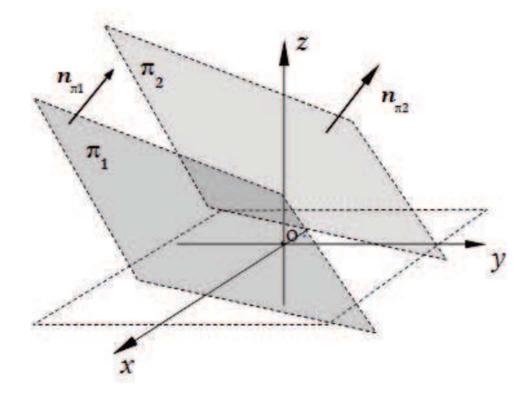


Figura 2.7.

Observaciones:

1 - Dos planos paralelos pueden ser coincidentes. Por ejemplo, los planos: 3x+y+2z+2=0 y 6x+2y+4z+4=0 son coincidentes (se trata del mismo plano).

2 - Si dos planos no son paralelos, entonces se intersecan a lo largo de una línea recta.

2.2.4.2 Planos Perpendiculares

Definición: Dos planos son *perpendiculares* si y sólo si sus vectores normales son perpendiculares. Es decir: $\boldsymbol{n}_{\pi 1}.\boldsymbol{n}_{\pi 2} = 0$

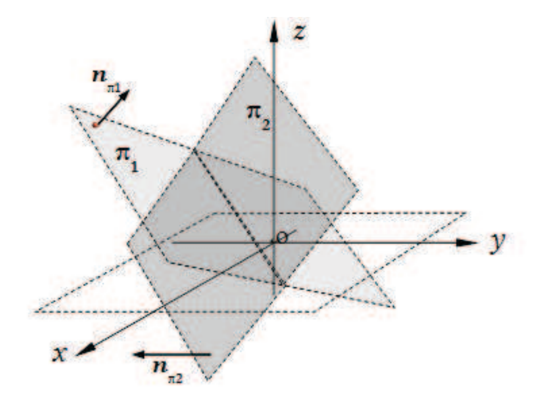


Figura 2.8.

✘ Ejercicio 2.11.

Para reflexionar y resolver:

Dadas las ecuaciones generales de dos planos π_1 y π_2,

a) ¿Qué relación cumplen los coeficientes de x, y, z de las ecuaciones generales de los dos planos dados, si éstos son paralelos?

b) ¿Qué relación cumplen los coeficientes de x, y, z y el término independiente de las ecuaciones generales de los dos planos, si éstos son coincidentes?

c) ¿Qué relación cumplen los coeficientes de x, y, z de las ecuaciones generales de los dos planos, si éstos son perpendiculares?

2.2.4.3 Ángulo entre dos planos

Definición: El ***ángulo*** θ entre dos planos es el ángulo que determinan sus respectivos vectores normales. Es decir:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_{\pi 1}.\boldsymbol{n}_{\pi 2}}{\|\boldsymbol{n}_{\pi 1}\|\|\boldsymbol{n}_{\pi 2}\|}$$

Por lo tanto, hay dos valores para este ángulo, suplementarios entre sí.

Teniendo en cuenta las componentes de los vectores normales, esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Un plano π_3 que ***bisecta*** a dos planos dados π_1 y π_2, es aquel que forma igual ángulo con cada uno de los planos dados. Teniendo en cuenta que el ángulo entre los planos está dado por el ángulo entre sus vectores normales, el vector $\boldsymbol{n}_{\pi 3}$ forma igual ángulo con los vectores $\boldsymbol{n}_{\pi 1}$ y $\boldsymbol{n}_{\pi 2}$.

2.2.5 Familia de planos

2.2.5.1 Familia de planos paralelos

La familia de planos paralelos de vector normal $\boldsymbol{n}_{\pi}=(A, B, C)$ está dada por:

$Ax+By+Cz+k=0$ donde $k \in R$

k es el *parámetro de la familia de planos* paralelos de vector normal $\boldsymbol{n}_{\pi}=(A, B, C)$.

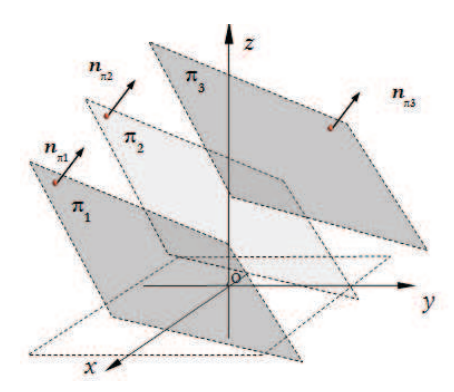


Figura 2.9.

✘ Ejercicio 2.12.

Para reflexionar y resolver: Escriba la ecuación de la familia de planos:

a) Paralelos al plano *xy*.

b) Paralelos al plano *xz.*

c) Paralelos al plano *yz*.

Las ecuaciones de estas familias de planos nos permitirán obtener en el Capítulo 5, las ecuaciones de las curvas de intersección de una superficie dada con planos paralelos a los planos coordenados.

2.2.5.2 Familia de planos que tienen en común la traza sobre algún plano coordenado

La familia de planos que tienen en común la traza sobre el plano *xz*, está dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{k} + \frac{z}{c} = 1$$

donde $k \in R$, es el parámetro de la familia de planos.

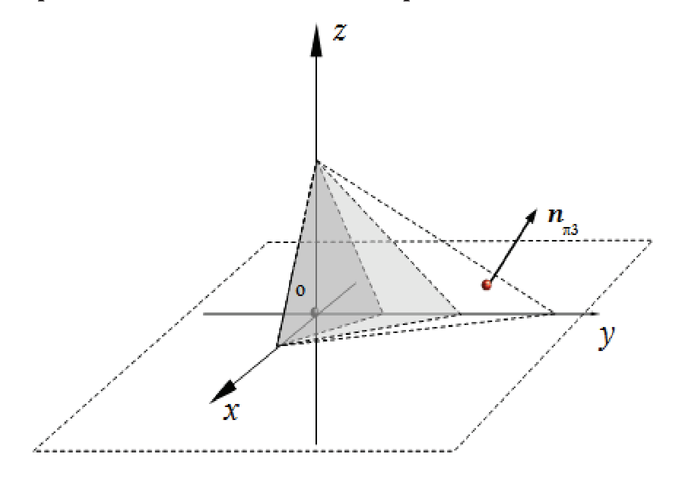


Figura 2.10.

✘ Ejercicio 2.13.

Para reflexionar y resolver: Deduzca la expresión correspondiente a la familia de planos:

a) que tienen en común la traza sobre el plano *yz.*

b) que tienen en común la traza sobre el plano *xy.*

2.2.5.3 Familia de planos que pasan por la intersección de dos planos dados

Sean los planos no paralelos π_1 y π_2

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ Ecuación general del plano π_1

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ Ecuación general del plano π_2

La ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de π_1 y π_2 es:

$$k_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+k_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad k_1\ k_2 \in R$$

que también puede escribirse como:

$$(k_1A_1+k_2A_2)x+(k_1B_1+k_2B_2)y+(k_1C_1+k_2C_2)z+k_1D_1+k_2D_2=0 \qquad k_1\ k_2 \in R$$

Donde k_1 y k_2 son parámetros que pueden tomar cualquier valor real. La elección de valores específicos para los mismos nos permite obtener la ecuación de un plano que pertenece a la familia de planos que pasan por la intersección de π_1 y π_2.

La ecuación de la *familia reducida de planos que pasan* por *la intersección de* π_1 *y* π_2 (excluído el plano π_2) es:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad \text{donde } k \in R$$

que también puede escribirse como:

$$(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+(C_1+kC_2)z+D_1+kD_2=0 \qquad k \in R$$

Ambas ecuaciones son ecuaciones de planos ya que resultan lineales en las tres variables. La diferencia es que la familia de planos que se obtiene con la segunda ecuación, no incluye al plano π_2. Es decir, no existe un valor real del parámetro k para el cual se obtenga la ecuación del plano π_2.

Veamos ahora que cualquier plano que satisfaga esta ecuación, pasa por la intersección de los dos planos dados. Sean dos puntos Q y R que pertenecen a la intersección de los dos planos dados. Cualquier otro plano que satisfaga la última ecuación planteada, también pasará por los puntos Q y R.

Esto es así porque al sustituir en dicha ecuación las coordenadas de Q (o de R), resulta: $0+k0=0$, por ser Q (o R) punto de ambos planos. Es decir, para Q (o R), se satisface la ecuación para cualquier valor del parámetro k.

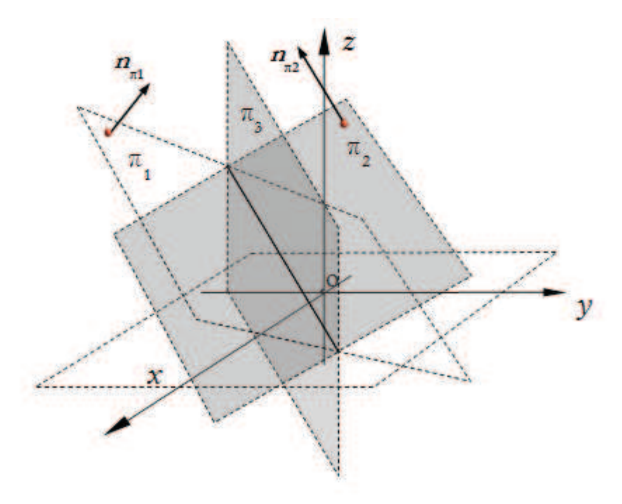


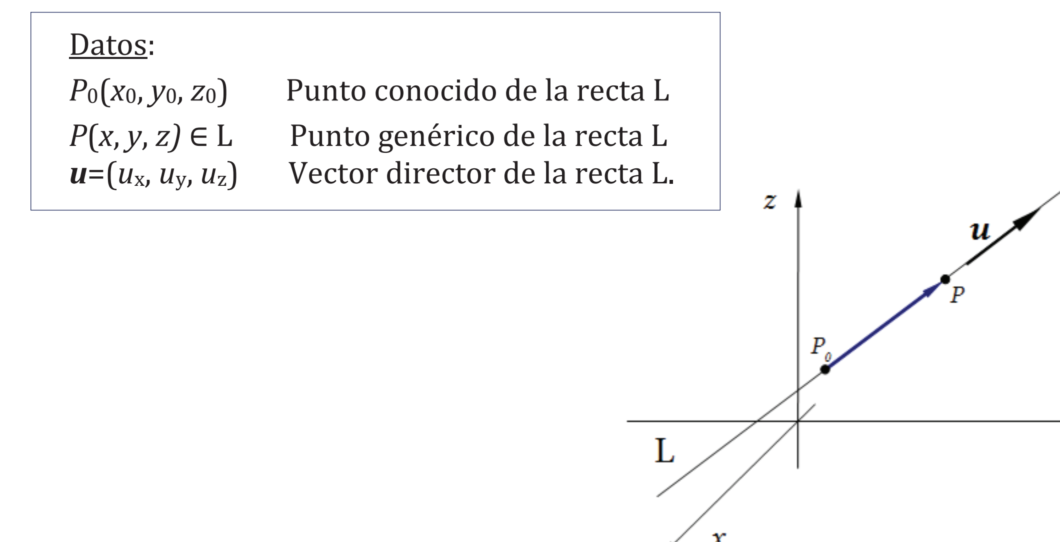
Figura 2.11.

2.3 RECTAS EN EL ESPACIO

2.3.1 Ecuaciones de una recta en el espacio

2.3.1.1 Ecuaciones de una recta conocidos un vector director y un punto

Se puede hallar la ecuación de la recta L si se conocen un punto de la recta L y un vector director $\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$).



Datos:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$	Punto conocido de la recta L
$P(x, y, z) \in$ L	Punto genérico de la recta L
$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$	Vector director de la recta L.

Figura 2.12.

Definición: Una ***recta*** en R^3 de vector director $\boldsymbol{u}$ (no nulo) y que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector $\boldsymbol{P_0P}$ es paralelo a $\boldsymbol{u}$.

. ECUACIÓN VECTORIAL PARAMÉTRICA DE LA RECTA

El vector $\boldsymbol{P_0P}$ queda definido por sus componentes: $\boldsymbol{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

Por otra parte, el vector $\boldsymbol{P_0P}$ es paralelo al vector $\boldsymbol{u}$. Es decir,

$\boldsymbol{P_0P}=t\,\boldsymbol{u}$; $t \in R$

Sustituimos en esta última expresión:

$\boldsymbol{P_0P}=\boldsymbol{OP}-\boldsymbol{OP_0}$

y resulta:

$$\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OP_0}+t\boldsymbol{u} \qquad t \in R$$

Esta ecuación constituye la denominada ***ecuación vectorial paramétrica*** de la recta en el espacio, donde t es un parámetro que puede tomar cualquier valor real. Para cada valor del parámetro t que elegimos, obtenemos un vector $\boldsymbol{OP}$ tal que P es punto de la recta en estudio.

Expresando los vectores anteriores en términos de sus componentes obtenemos:

$$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+t(u_x, u_y, u_z) \qquad t \in R$$

Esta última ecuación se denomina ecuación *vectorial paramétrica* de la recta en el espacio en *término de sus componentes*.

. ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA

De la ecuación vectorial paramétrica se obtienen, igualando componente a componente, las *ecuaciones cartesianas paramétricas* de la recta:

$$\begin{cases} x=x_0+tu_x \\ y=y_0+tu_y \\ z=z_0+tu_z \end{cases} \qquad t \in R$$

Para cada valor del parámetro t, obtenemos un punto de la recta L.

De las ecuaciones anteriores, eliminando el parámetro t, se obtienen las *ecuaciones cartesianas o simétricas* de la recta en el espacio:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$$

Siendo $u_x \neq 0$, $u_y \neq 0$, $u_z \neq 0$.

Se denominan *números directores* a cualquier terna de números reales, proporcionales a los cosenos directores de un vector director de la recta.

2.3.1.2 Otros datos posibles

- Si el dato disponible es el versor director $\boldsymbol{u}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, se sustituyen sus componentes en las ecuaciones anteriores reemplazando (u_x, u_y, u_z).

- Si el dato disponible son dos puntos de la recta L: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, podemos determinar las componentes del vector director de la siguiente manera: $u_x=x_2-x_1$, $u_y=y_2-y_1$, $u_z=z_2-z_1$.

- Si los datos disponibles son dos planos cuya intersección es la recta buscada, podemos identificar dos puntos de la recta evaluando las coordenadas de dos puntos que pertenezcan simultáneamente a ambos planos. Con las coordenadas de los dos puntos es posible evaluar las componentes del vector director de la recta, tal como vimos en el punto anterior.

✘ Ejercicio 2.14.

Determine las distintas formas de la ecuación de la recta L, que es paralela al vector $\boldsymbol{u}=(3, 1, -2)$ y que además pasa por el punto $P_0(-1, 2, 1)$.

✘ Respuesta Ejercicio 2.14.

$\boldsymbol{OP}=(-1, 2, 1)+t(3, 1, -2)$ $\quad t \in R$

$(x, y, z)=(-1, 2, 1)+t(3, 1, -2)$ $\quad t \in R$ Ecuación vectorial paramétrica de L.

Igualando componente a componente obtenemos:

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2+t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t \in R$$

Ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta

Eliminando el parámetro t de cada una de las ecuaciones anteriores obtenemos las ecuaciones cartesianas o simétricas de la recta en el espacio, las cuales están dadas por la siguiente expresión:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

✘ Ejercicio 2.15.

Encuentre la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $H_0(2, 2,-5)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{u}=(3, 1, 1)$. Identifique además, dos planos cuya intersección esté dada por dicha recta.

✘ Respuesta Ejercicio 2.15.

En primer lugar encontraremos la ecuación vectorial paramétrica:

$\boldsymbol{OP}=(2, 2, -5)+t(3, 1, 1) \qquad t \in R$

$(x, y, z)=(2, 2,-5)+t(3, 1, 1) \quad t \in R$ Ecuación *vectorial paramétrica* de la recta dada.

Igualando componente a componente obtenemos:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=2+t \\ z=-5+t \end{cases} \qquad t \in R$$ Ecuaciones *cartesianas* paramétricas

Eliminando el parámetro t podemos escribir:

$1/3\ (x-2)=(y-2)=(z+5)$ Ecuaciones simétricas de la recta

Podemos estudiar la ecuación de esta recta que surge a partir de la intersección de dos planos y encontrar las ecuaciones de los mismos. De la primera igualdad, surge la ecuación de uno de los dos planos, de la siguiente manera:

$1/3(x-2)=y-2$

$x-2=3y-6$

$x-3y+4=0$

A partir de la segunda igualdad obtenemos:

$y-2=z+5$

$y-z-7=0$

Entonces, las ecuaciones de dos planos cuya intersección define la recta dada están dadas por las siguientes expresiones:

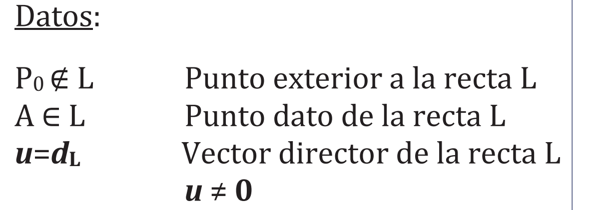
$$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ y-z-7=0 \end{cases}$$

A los efectos de verificar, por ejemplo, si el punto Q(5, 3, -4) pertenece a la recta de ecuación hallada, reemplazamos las coordenadas de dicho punto en el sistema de ecuaciones cartesianas paramétricas y obtenemos el valor del parámetro en cada ecuación. Si éste asume el mismo valor en todas las ecuaciones significa que el punto efectivamente pertenece a la recta dada.

$$\begin{cases} x=2+3t=5 & \rightarrow \quad t=1 \\ y=2+t=3 & \rightarrow \quad t=1 \\ z=-5+t=-4 & \rightarrow \quad t=1 \end{cases}$$

Por lo que concluimos que el punto Q pertenece a la recta.

2.3.2 Distancia de un punto a una recta en R^3



<u>Datos</u>:

$P_0 \notin L$ Punto exterior a la recta L
$A \in L$ Punto dato de la recta L
$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{d}_L$ Vector director de la recta L
$\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$

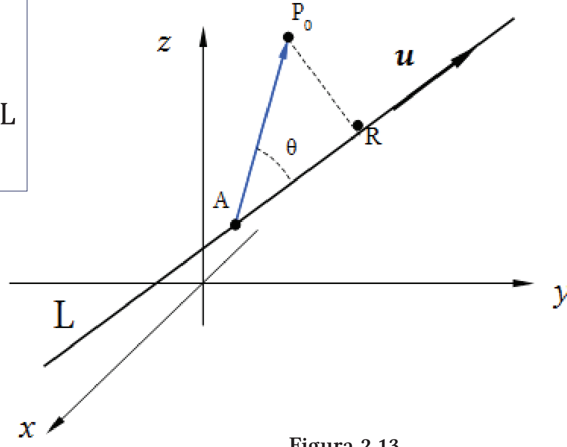


Figura 2.13.

Trabajaremos con el ángulo definido entre el vector $\boldsymbol{AP_0}$ y el vector director $\boldsymbol{d}_L$

Planteamos: $h=||\boldsymbol{AP_0}||\ \text{sen}\theta$

Pero sabemos que : $||\boldsymbol{AP_0} \wedge \boldsymbol{d}_L||=||\boldsymbol{AP_0}||\ ||\ \boldsymbol{d}_L\ ||\ \text{sen}\theta$

De esta expresión obtenemos:

$$\frac{\|\boldsymbol{AP_0} \wedge \boldsymbol{d_L}\|}{\|\boldsymbol{d_L}\|} = \|\boldsymbol{AP_0}\| sen\theta$$

Por lo tanto tendremos que la distancia de un punto a una recta en el espacio está dada por:

$$h = \frac{\|\boldsymbol{AP_0} \wedge \boldsymbol{d_L}\|}{\|\boldsymbol{d_L}\|}$$

Cabe señalar que en la deducción de la fórmula de distancia utilizamos el ángulo que queda definido entre dos vectores ya conocidos $\boldsymbol{AP}_0$ y $\boldsymbol{d_L}$. El punto R indicado en la Figura 2.13, es aquel que pertenece a la recta L, y también pertenece a la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a la recta L. Si determinásemos el punto R, el módulo del vector $\mathbf{P_0R}$ es el valor de la distancia buscada entre el punto P_0 y la recta L.

✘ Ejercicio 2.16.

Calcule la distancia del punto $P_0(1, 0, 1)$ a la recta L, dada por:

$$L: \begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=2+2t \end{cases} \qquad t \in R$$

Ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta L

Todas las magnitudes están medidas en metros.

✘ Respuesta Ejercicio 2.16.

En primer lugar verificamos que el punto P_0 (1,0,1) no pertenezca a la recta L :

$$\begin{cases} 1=3+t & \rightarrow & t=-2 \\ 0=-2-t & \rightarrow & t=-2 \\ 1=2+2t & \rightarrow & t=-1/2 \end{cases}$$

Es así que no existe un único valor de t que satisfaga las ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta, cuando sustituimos en ellas las coordenadas del punto P_0. Por lo tanto el punto P_0 no pertenece a la recta L.

Buscamos un punto que pertenece a la recta L:

Si t=0 → A(3, -2, 2)

Con estos puntos definimos el vector $\boldsymbol{AP_0}$:

$\boldsymbol{AP_0}$= $\boldsymbol{OP_0}$ -$\boldsymbol{OA}$= (1-3, 0-(-2), 1-2)=(-2, 2, -1)

Calculamos el producto $\boldsymbol{AP_0} \wedge \mathbf{d_L}$:

$$\boldsymbol{AP_0} \wedge \boldsymbol{d_L} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, 3, 0)$$

$$h = \frac{\|\boldsymbol{AP_0} \wedge \boldsymbol{d_L}\|}{\|\boldsymbol{d_L}\|} = \frac{\sqrt{9+9}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3} \text{ m}$$

Describiremos a continuación otra forma de evaluar la distancia entre una recta en R^3 y un punto exterior a la misma. Las ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta dada son:

$$\begin{cases} x=x_A+tu_x \\ y=y_A+tu_y \\ z=z_A+tu_z \end{cases} \quad t \in R$$

El punto R, indicado en la Figura 2.13 es un punto tal que satisface la ecuación de la recta. Es decir, el vector $\boldsymbol{P_0R}$ está dado por:

$$\boldsymbol{P_0R} = (x_R - x_0, y_R - y_0, z_R - z_0) = (x_A + tu_x - x_0,\ y_A + tu_y - y_0,\ z_A + tu_z - z_0)$$

Además, el vector $\boldsymbol{P_0R}$ es perpendicular al vector director de la recta. Entonces planteamos la condición de perpendicularidad de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P_0R}.\boldsymbol{d_L} = 0$$

De esta expresión se obtiene el valor del parámetro t tal que sustituido en la ecuación de la recta L, nos permite determinar las coordenadas del punto R. Para los datos del ejercicio, resulta t=-1, y por lo tanto el punto R es:

R(2, -1, 0)

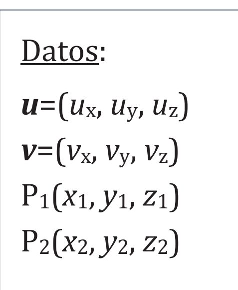
Finalmente, el módulo del vector $\boldsymbol{P_0R}$ es el valor de la distancia buscada entre el punto P_0 y la recta L. Es decir,

$h = \|\boldsymbol{P_0R}\| = \|(1,-1,-1)\| = \sqrt{3}$ m

2.3.3 Posiciones relativas entre rectas en el espacio

2.3.3.1 Rectas paralelas

Buscamos ahora encontrar las posiciones relativas entre dos rectas dadas:



Datos:

$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$

$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

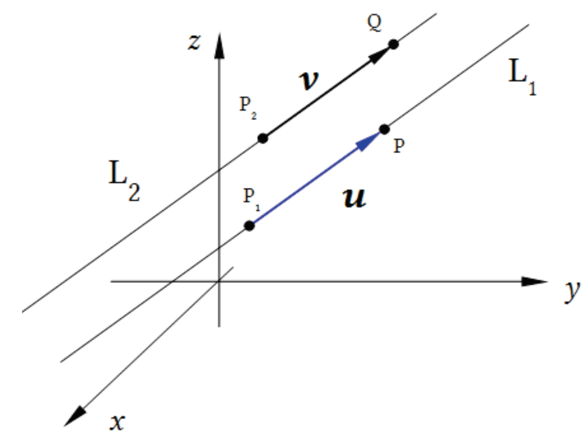


Figura 2.14.

Podemos escribir las ecuaciones vectoriales paramétricas de las rectas L_1 y L_2:

$(x, y, z)=(x_1, y_1, z_1)+t_1(u_x, u_y, u_z) \qquad t_1 \in R$

$(x, y, z)=(x_2, y_2, z_2)+t_2(v_x, v_y, v_z) \qquad t_2 \in R$

Definición: Dos rectas en R^3 son *paralelas* si y sólo si sus vectores directores son paralelos. Es decir: $\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v} \qquad k \in R$

✘ Ejercicio 2.17.

Para reflexionar y resolver. Dadas dos rectas paralelas:

a) ¿Cómo determinaría el plano que contiene a las dos rectas paralelas dadas?

b) ¿Cómo determinaría la distancia entre las dos rectas paralelas dadas?

c) ¿Cuál es el resultado de evaluar el producto mixto entre los vectores directores de ambas rectas y el vector definido entre dos puntos de las dos rectas dadas?

2.3.3.2 Rectas secantes



Datos :

$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$

$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

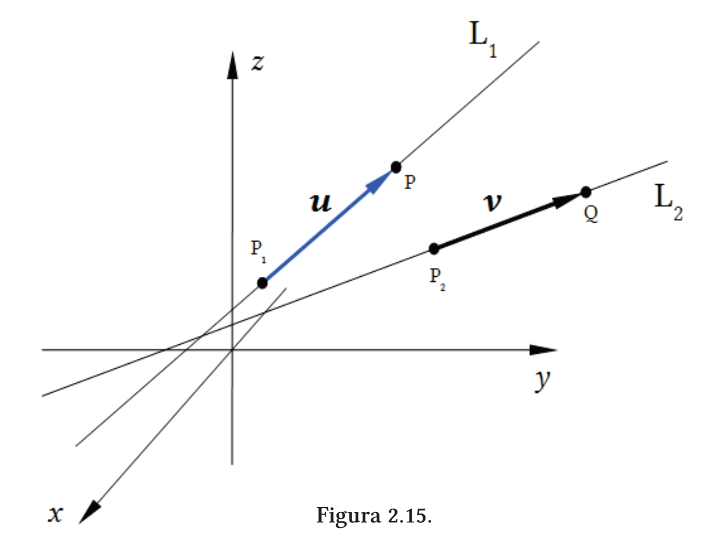


Figura 2.15.

Definición: Dos rectas no paralelas en R^3 son *secantes* si y sólo si:

$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{P_1P_2}=0$

✘ Ejercicio 2.18.

Para reflexionar y resolver. Dadas dos rectas secantes:

a) ¿Cómo determinaría el plano que contiene a las dos rectas secantes dadas?

b) ¿Cómo determinaría el ángulo entre las dos rectas secantes dadas?

c) Interprete geométricamente la condición de producto mixto nulo: $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{P_1P_2}=0$

2.3.3.3 Rectas alabeadas

Datos:

$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$

$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

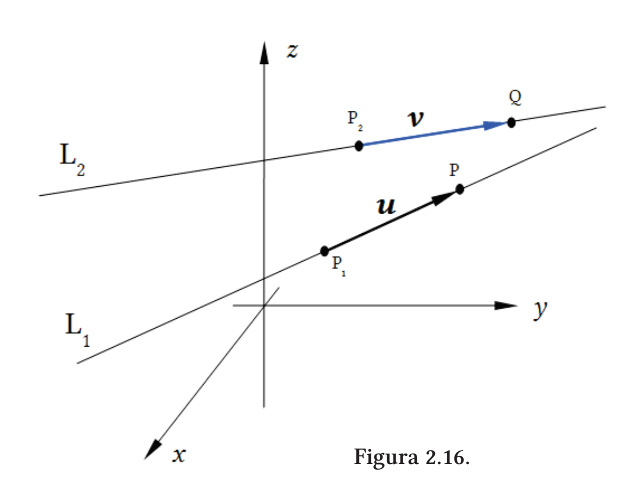


Figura 2.16.

Definición: Dos rectas no paralelas en R^3 son *alabeadas* si y sólo si:

$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{P_1P_2} \neq 0$

Las diversas posiciones relativas entre dos rectas en el espacio pueden ser sintetizadas de acuerdo a lo indicado en el siguiente diagrama:

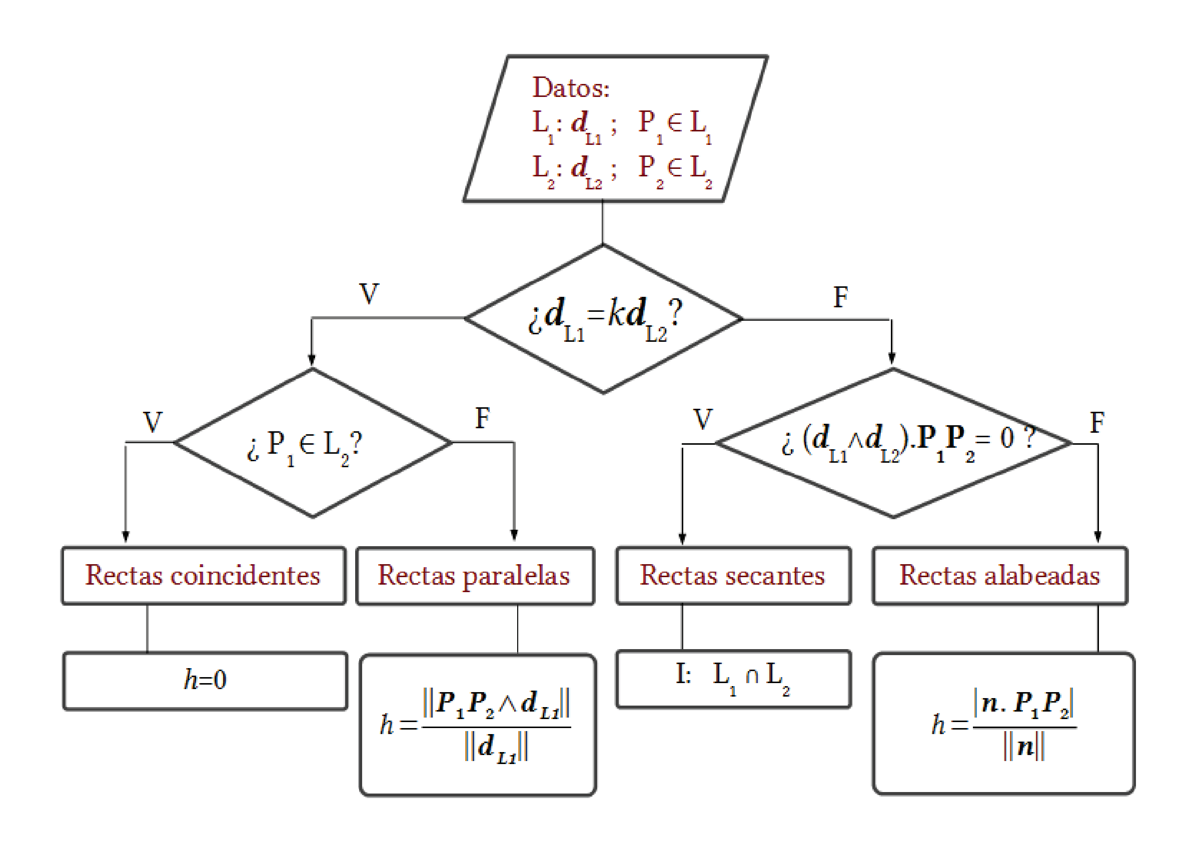


Diagrama 2.1.

✘ Ejercicio 2.19.

Para reflexionar y resolver. Dadas dos rectas alabeadas:

a) ¿ Cómo determinaría la *distancia* entre las dos rectas alabeadas dadas ?

b) ¿ Cómo determinaría el *ángulo* entre las dos rectas alabeadas dadas ?

c) Interprete geométricamente la condición de producto mixto no nulo: $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}).\boldsymbol{P_1P_2} \neq 0$

2.3.3.4 Ángulo entre dos rectas

Datos :

$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$
$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$
Vectores directores de las rectas L_1 y L_2
$I_1(x_1, y_1, z_1)$
Punto de intersección de las rectas dadas.

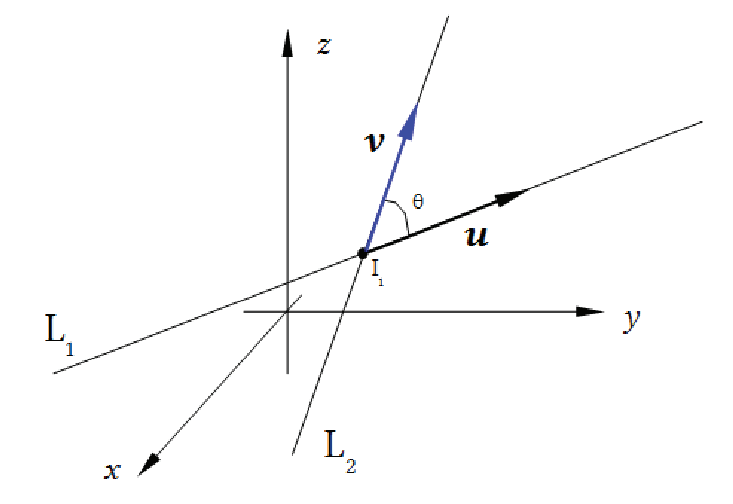


Figura 2.17.

La determinación del ángulo entre las rectas L_1 y L_2 dadas, se realiza evaluando el ángulo entre los vectores directores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de estas rectas:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

Hay dos posibles valores para el ángulo θ, suplementarios entre sí.

Con la misma expresión anterior es posible evaluar el ángulo entre los vectores directores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de dos rectas alabeadas.

2.3.4 Posiciones relativas entre plano y recta

Buscamos ahora determinar la posición relativa entre un plano y una recta dados.

2.3.4.1 Recta y plano paralelos

Datos :

$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$
$\boldsymbol{n}_\pi=(A, B, C)$
$P_1(x_1, y_1, z_1)$ Punto de la recta.

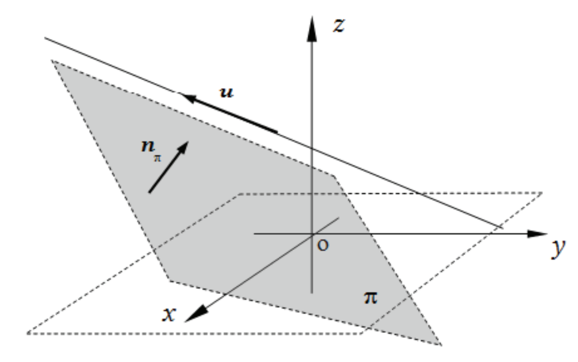


Figura 2.18.

Podemos escribir las ecuaciones de la recta L y del plano π:

$(x, y, z)=(x_1, y_1, z_1)+t_1(u_x, u_y, u_z) \qquad t_1 \in R$

$Ax+By+Cz+D=0$

Definición: Un plano de vector normal $\boldsymbol{n}_\pi$ y una recta de vector director $\boldsymbol{u}$ en R^3, son paralelos si y sólo si:

$$\boldsymbol{u} . \boldsymbol{n}_\pi=0$$

✘ Ejercicio 2.20.

Para reflexionar y resolver. Dados un plano y una recta paralelos:

a) ¿Cómo distinguiría si la recta está contenida o no en el plano?

b) ¿Cómo determinaría la distancia entre la recta y el plano?

2.3.4.2 Recta y plano secantes

Datos :

$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$

$\boldsymbol{n}_\pi=(A, B, C)$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ Punto de la recta.

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ Punto del plano.

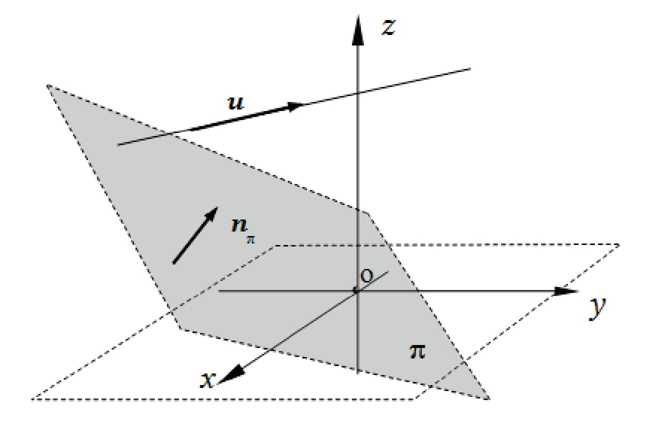


Figura 2.19.

Definición: Un plano de vector normal $\boldsymbol{n}_\pi$ y una recta de vector director $\boldsymbol{u}$ en R^3, son secantes si y sólo si:

$$\boldsymbol{u} . \boldsymbol{n}_\pi \neq 0$$

✘ Ejercicio 2.20.

Para reflexionar y resolver. Dados un plano y una recta secantes:

a) ¿Cómo determinaría el punto de intersección entre la recta y el plano?

b) ¿Cómo determinaría el ángulo que forman la recta y el plano?

2.3.4.3 Recta y plano perpendiculares

Datos:

$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$

$\boldsymbol{n}_\pi=(A, B, C)$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ Punto de la recta.

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ Punto del plano.

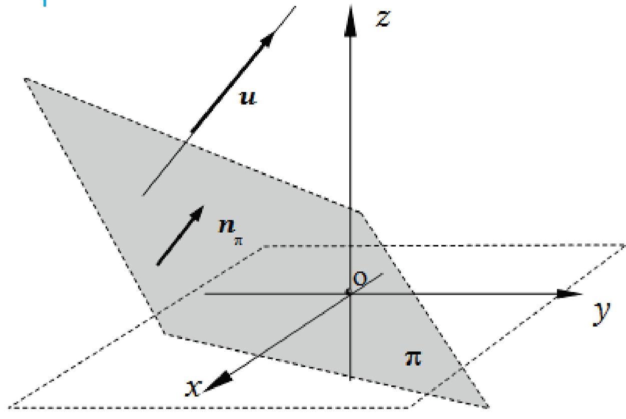


Figura 2.20.

Definición: Un plano de vector normal $\boldsymbol{n}_\pi$ y una recta de vector director $\boldsymbol{u}$ en R^3, son perpendiculares si y sólo si:

$$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{n}_\pi \qquad \text{con } k \in R$$

Las diversas posiciones relativas entre recta y plano en el espacio, pueden ser sintetizadas de acuerdo a lo indicado en el siguiente diagrama:

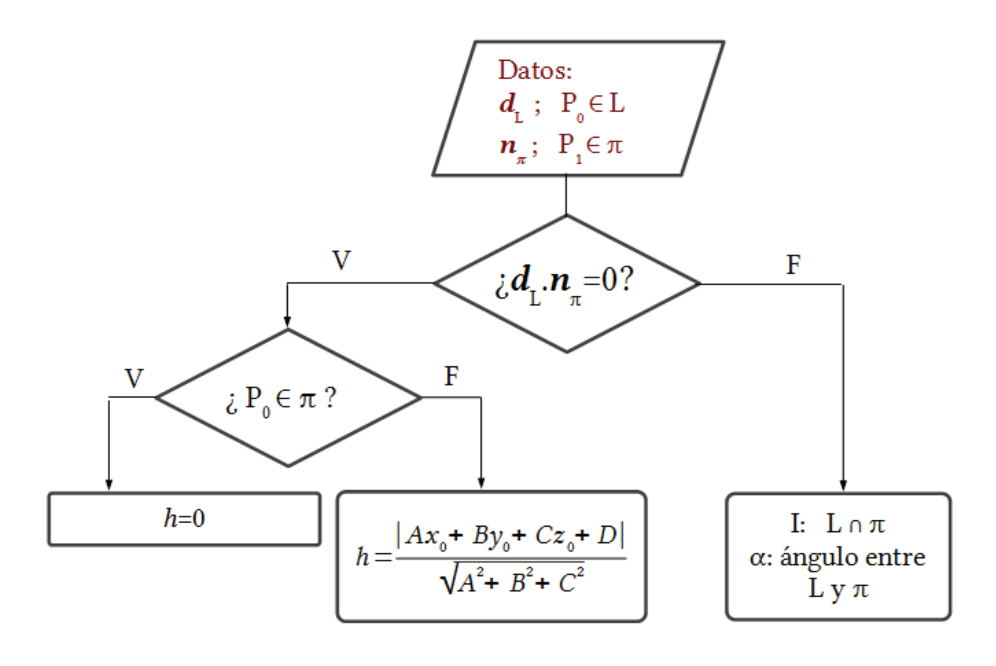


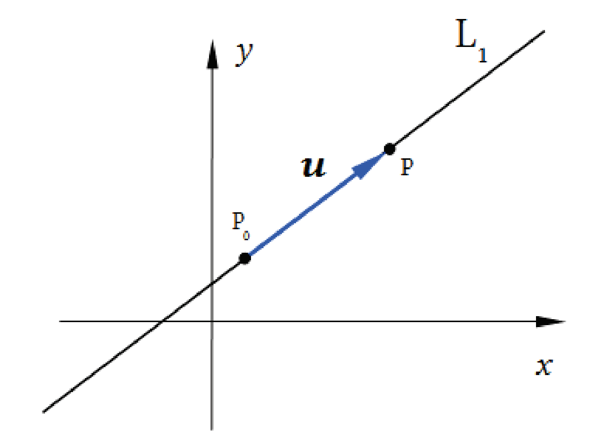
Diagrama 2.2.

2.4 RECTAS EN EL PLANO

Se puede hallar la ecuación de la recta L si se conocen dos puntos que pertenecen a L, o si se conoce un punto de L y un vector director.

Datos:

$P_0(x_0, y_0,)$
Punto dato de la recta L
$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y)$
Vector director de la recta L $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$
$P(x, y)$
Punto genérico de la recta L



Definición: Una ***recta*** en R^2, de vector director $\boldsymbol{u}$ no nulo y que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0)$, es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, tales que el vector $\boldsymbol{P_0P}$ es paralelo al vector $\boldsymbol{u}$.

2.4.1 Ecuaciones de una recta en el plano

El vector $\boldsymbol{P_0P}$ queda definido por sus componentes: $\boldsymbol{P_0P} = (x-x_0, y-y_0)$

Por otra parte, el vector $\boldsymbol{P_0P}$ es paralelo al vector $\boldsymbol{u}$. Es decir,

$\boldsymbol{P_0P}=t\,\boldsymbol{u}$; $t \in R$

Sustituimos en esta última expresión:

$\boldsymbol{P_0P}=\boldsymbol{OP}-\boldsymbol{OP_0}$

y resulta:

$\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OP_0}+t\boldsymbol{u}$ $\quad t \in R$ $\quad$ Ecuación vectorial paramétrica de la recta

Donde t es un parámetro que puede tomar cualquier valor real. Para cada valor que elegimos del parámetro t, determinamos un vector $\boldsymbol{OP}$ tal que el punto P es punto de la recta en estudio. Expresando los vectores anteriores en términos de sus componentes:

$(x, y)=(x_0, y_0)+t(u_x, u_y)$ $\quad t \in R$

La última ecuación es la denominada ***ecuación vectorial paramétrica*** de la recta en R^2 en términos de sus componentes.

. ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA EN R^2

De la ecuación vectorial paramétrica igualando componente a componente, se obtiene:

$$\begin{cases} x = x_0 + t u_x \\ y = y_0 + t u_y \end{cases} \quad t \in R$$

Ecuaciones *cartesianas paramétricas* de la recta en R^2

De la ecuación anterior, eliminando el parámetro t, se obtiene la ecuación cartesiana de la recta en R^2:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y}} \qquad u_x \neq 0\,; \quad u_y \neq 0$$

Recordamos que u_x y u_y reciben también el nombre de *números directores*.

Observaciones :

- Si el dato disponible es el versor director $\boldsymbol{u}=(\cos\alpha, \cos\beta)$, se sustituyen sus componentes en las ecuaciones anteriores reemplazando (u_x, u_y).

- Si el dato disponible son dos puntos de la recta L : $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, podemos determinar las componentes del vector director $\boldsymbol{u}$ de la siguiente manera :

$$u_x = x_2 - x_1, \quad u_y = y_2 - y_1$$

Veamos a continuación dos formas especiales de la ecuación de la recta en R^2.

A partir de la ecuación cartesiana de la recta en R^2, es posible escribir:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} \quad \rightarrow \quad y - y_0 = \frac{u_y}{u_x}(x - x_0) \quad ; \, u_x \neq 0$$

Designando m a la pendiente de la recta, tendremos:

$$m = \frac{u_y}{u_x}$$

Entonces resulta:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Ecuación de la recta en R^2 conocidas la pendiente y un punto.

Cabe señalar que la pendiente m es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta dada.

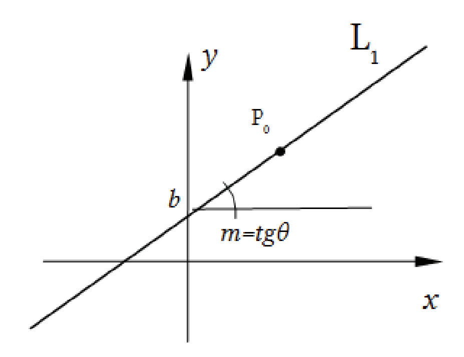


Figura 2.22.

Llamando b=-mx_0+y_0, la última ecuación puede quedar expresada como:

$y=mx+b$	Ecuación de la recta en R^2 conocidas la pendiente y la ordenada al origen.

Esta última ecuación suele denominarse ecuación *explícita* de la recta en R^2.

✘ Ejercicio 2.22.

Determine las distintas formas de la ecuación de la recta L, paralela al vector $\boldsymbol{u}$=(3, -2) y que pasa por el punto P_0(-2, 1).

✘ Respuesta Ejercicio 2.22.

$\boldsymbol{OP}$=(-2, 1)+t(3, -2) $\quad t \in R$

(x, y)=(-2, 1)+t(3, -2) $\quad t \in R$ Ecuación *vectorial paramétrica* de la recta

Igualando componente a componente obtenemos:

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-2t \end{cases} \quad t \in R$$ Ecuaciones *cartesianas paramétricas* de la recta

Eliminando el parámetro t de las ecuaciones anteriores obtenemos la *ecuación cartesiana* de la recta:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}$$

Reordenando obtenemos:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$$

. ECUACIÓN GENERAL CARTESIANAS DE LA RECTA EN R^2

A partir de la ecuación de la recta en R^2 conocida la pendiente y la ordenada al origen:

$$y=mx+b$$

Reordenando todos los términos en el primer miembro, ésta resulta:

$$Ax+By+C=0$$

Ecuación *general* de la recta en R^2

Esta última ecuación suele denominarse también ecuación *implícita* de la recta en R^2.

Veamos a continuación las relaciones que existen entre los coeficientes A, B y C de la última ecuación, con los coeficientes m y b empleados anteriormente. Para ello, a partir de la ecuación general de la recta en R^2 se obtiene, siendo B no nulo:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

Por lo tanto:

$$m=-\frac{A}{B}\ ;\ \ b=-\frac{C}{B}$$

Teniendo en cuenta que:

$$m=\frac{u_y}{u_x}$$

y además $\boldsymbol{u}=(u_x, u_y)$, resulta que un posible vector director es: $\boldsymbol{u}=(B, -A)$
Entonces, un vector $\boldsymbol{n}_L$, normal a la recta L en R^2 es:

$$\boldsymbol{n}_L=(A, B)$$

ya que $\boldsymbol{n}_L \cdot \boldsymbol{u} = 0$

✘ Ejercicio 2.23.

Determine una ecuación vectorial paramétrica de la recta L_2, perpendicular a L_1: $2x+y-2=0$ y que pasa por el punto A(0,1).

Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 2.23.

$\boldsymbol{n}_{L1}$=(2, 1) como $\boldsymbol{d}_{L2}=\boldsymbol{n}_{L1}$, resulta: $\boldsymbol{d}_{L2}$=(2, 1)

Por lo tanto:

L_2: $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+t\boldsymbol{d}_{L2}$	$t \in R$
L_2: $(x, y)=(0, 1)+t(2, 1)$	$t \in R$

2.4.2 Distancia de un punto a una recta en R^2

Buscamos ahora determinar la distancia de un punto a una recta en R^2.

<u>Datos</u>:

$P_0\ (x_0, y_0) \notin L$
Punto que no pertenece a la recta.

L: $Ax+By+C=0$
Ecuación general de la recta en R^2

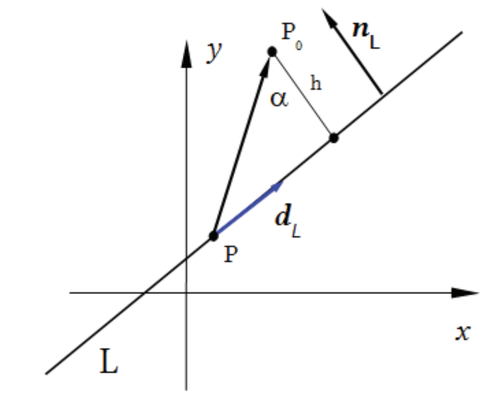


Figura 2.23.

Un vector normal a la recta L en R^2 es $\boldsymbol{n}_L=(A, B)$ cuyo módulo resulta:

$$\|\boldsymbol{n}_L\| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

De acuerdo a la figura:

$$h = \|\boldsymbol{PP_0}\||cos\alpha|$$

De la definición de producto escalar sabemos que:

$$\boldsymbol{PP_0}.\boldsymbol{n}_L = \|\boldsymbol{PP_0}\|\|\boldsymbol{n}_L\|cos\alpha$$

Sustituimos la expresión para h y obtenemos:

$$|\boldsymbol{PP_0}.\boldsymbol{n}_L| = h\|\boldsymbol{n}_L\|$$

Es decir:

$$h = \frac{|\boldsymbol{PP_0}.\boldsymbol{n}_L|}{\|\boldsymbol{n}_L\|}$$

Evaluando el numerador de la expresión anterior, resulta:

$\boldsymbol{PP_0} \cdot \boldsymbol{n}_L=(x_0-x, y_0-y) \cdot (A, B)$

$\boldsymbol{PP_0} \cdot \boldsymbol{n}_L=Ax_0+By_0+(-Ax-By)$

Considerando la ecuación de la recta L, podemos sustituir $(-Ax-By)$ y obtenemos:

$\boldsymbol{PP_0} \cdot \boldsymbol{n}_L=Ax_0+By_0+C$

Entonces:

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

✘ Ejercicio 2.24.

Particularice la expresión anterior para evaluar la distancia de una recta cualquiera de R^2 al origen de coordenadas.

✘ Respuesta Ejercicio 2.24.

Si $P_0(0, 0)$, la expresión anterior resulta:

$$h=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

✘ Ejercicio 2.25.

Evalúe la distancia entre las rectas paralelas dadas L_1 y L_2. Todas las magnitudes están medidas en centímetros.

L_1: $2x+y-2=0$
L_2: $2x+y+3=0$

✘ Respuesta Ejercicio 2.25.

Determinamos un punto Q cualquiera de la recta L_1: Por ejemplo Q (0,2)
Evaluamos la distancia del punto Q a L_2:

$$h=\frac{|2x_0+y_0+3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}} \qquad h=\sqrt{5}\text{ cm}$$

2.4.3 Familia de rectas en R^2

2.4.3.1 Familia de rectas de pendiente dada

Es la familia de rectas de pendiente fija m y ordenada al origen variable k.

Es decir: $y=mx+k$

Donde k es el parámetro de la familia, $k \in R$.

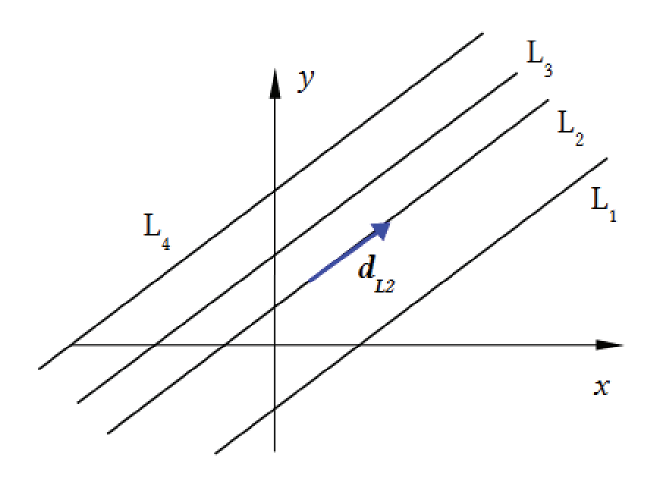


Figura 2.24.

2.4.3.2 Familia de rectas que pasan por el punto $P_0(x_0, y_0)$

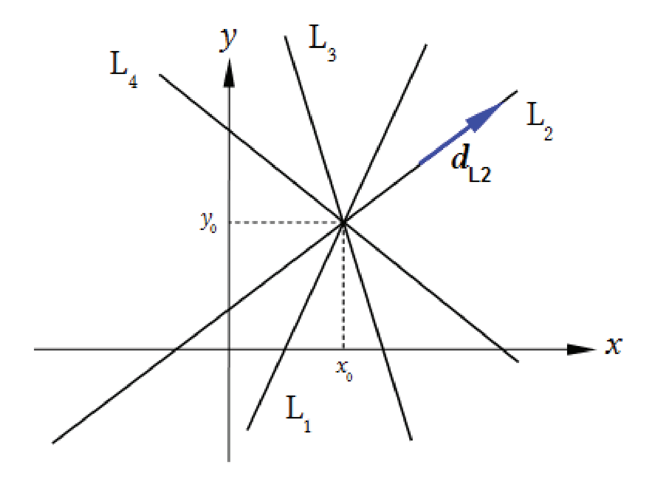


Figura 2.25.

Es el haz de rectas que pasan por el punto P_0 (x_0, y_0) y de pendiente variable k. Es decir:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Donde k es el parámetro de la familia, $k \in R$.

Cabe señalar que en esta familia, queda excluida la recta paralela al eje y que pasa por dicho punto.

2.4.3.3 Familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas.

Dadas las dos rectas no paralelas en R^2:

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$$

$$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

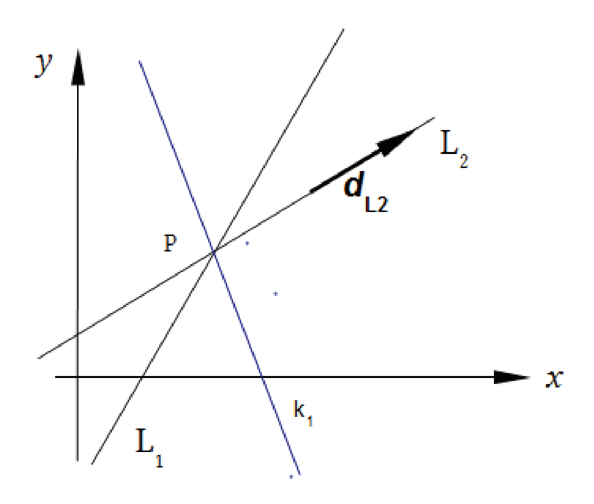


Figura 2.26.

El haz de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas está dado por:

$k_1(A_1x+B_1y+C_1)+k_2(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad k_1, k_2 \in R$

que también puede escribirse como:

$(k_1A_1+k_2A_2)x+(k_1B_1+k_2B_2)y+(k_1C_1+k_2C_2)=0 \qquad k_1, k_2 \in R$

Donde k_1 y k_2 son parámetros que pueden tomar cualquier valor real. La elección de valores específicos para los mismos nos permite obtener la ecuación de una recta que pertenece a la familia de rectas dada.

Si $k_1=0$, recuperamos la ecuación de la recta L_2, en tanto que si $k_2=0$, recuperamos la ecuación de la recta L_1.

La ecuación de la ***familia reducida*** *de rectas que pasan* por *la intersección de las dos rectas dadas* (excluída la recta L_2) es:

$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$ donde $k \in R$

que también puede escribirse como:

$(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+(C_1+kC_2)=0 \; k\in R$

donde k es el parámetro del haz reducido de rectas, $k\in R$.

La diferencia entre ambas familias de rectas es que en la ecuación de la familia reducida, en la que se utiliza un solo parámetro, no existe valor de dicho parámetro k que permita obtener la ecuación de la recta L_2.

La ecuaciones presentadas son lineales en la variables x e y, por lo que efectivamente constituyen ecuaciones de rectas en R^2. Asimismo, cualquier recta de la familia de rectas, pasa por la intersección de las dos rectas dadas.

Esto es así porque sustituyendo las coordenadas del punto de intersección en la ecuación de la familia reducida de rectas resulta: $0+k.0=0$, ya que el punto pertenece a ambas rectas. Por lo tanto la ecuación se satisface para el punto dado, para todo valor del parámetro k. Es decir, el punto de intersección de las dos rectas dadas es punto también de cualquier recta de la familia definida. Análogamente se demuestra para el caso de la ecuación de la familia de rectas empleando dos parámetros.

2.5 ACTIVIDADES DE REPASO Y AUTOEVALUACIÓN

2.5.1 Planos

- Conceptualización (definición) de plano.
- Escriba la ecuación vectorial de un plano, a partir de los elementos observados en las Figuras 2.1 y 2.3.
- Escriba las ecuaciones de un plano en sus distintas formas, nombrando cada una de ellas.
- Identifique todos los elementos que componen y que definen a un plano. Represente gráficamente los mismos.
- Reflexione y represente gráficamente, posiciones relativas de dos planos. Indique las características que poseen las ecuaciones de ambos en los distintos casos. Ejemplifique.
- Represente gráficamente un plano, de ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ donde $A > 0$, $B < 0$ y $C > 0$
- Desarrolle en forma gráfica y analítica el concepto de distancia de un punto dado a un plano conocido.
- Exprese gráfica y analíticamente el concepto de familia de planos.
- Reflexione, investigue y enumere 3 ejemplos de estructuras o elementos reales, pertenecientes al ámbito de la ingeniería y de las ciencias, que a su entender se puedan expresar y describir geométricamente por medio de la ecuación de un plano.

2.5.2 Rectas

- Conceptualización (definición) de recta.
- Escriba las ecuaciones de una recta, en sus distintas formas, en el plano y en el espacio.
- Identifique y enuncie los elementos de una recta.
- Reflexione y grafique posiciones relativas de dos rectas. Indique las características que poseen las ecuaciones de ambas en los distintos casos.
- Represente gráficamente dos ejemplos de rectas, uno en el plano y otro en el espacio. Indique las características principales que poseen las mismas en ambos casos.
- Desarrolle en forma gráfica y analítica, el concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio.
- Exprese gráfica y analíticamente el concepto de familia de rectas en el plano.
- Desarrolle en forma gráfica y analítica el concepto de ángulo entre dos rectas en el plano y en el espacio.
- Desarrolle en forma gráfica y analítica, el concepto de distancia de un punto a una recta en el plano.
- Reflexione, investigue y enumere 3 ejemplos de estructuras o elementos reales, pertenecientes al ámbito de la ingeniería y de las ciencias, que a su entender se puedan expresar y describir geométricamente por medio de la ecuación de una recta.

✘ Ejercicio 2.26.

Halle la ecuación vectorial paramétrica y la ecuación general de la recta L_2, perpendicular a la recta L_1: $0,5x\text{-}y+2=0$, y que pasa por el punto C(1, -1). Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 2.26.

$\boldsymbol{n}_{L1}=(0.5, -1)$ $\quad \boldsymbol{d}_{L2}=\boldsymbol{n}_{L1}$

Es decir:

$\boldsymbol{d}_{L2}=(0.5, -1)$

$L_2 : \boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OC}+t\boldsymbol{d}_{L2} \qquad t \in R$

$L_2 : (x, y)=(1,-1)+t\,(0.5, -1)$ Ecuación paramétrica vectorial de L_2

$$\begin{cases} x=1+0.5t & t \in R \\ y=-1-t \end{cases}$$ Ecuaciones paramétricas cartesianas

Eliminando el parámetro *t* nos queda:

$1/0.5\ (x\text{-}1) = -(y+1)$

$2x-2=-y-1$

$2x+y-1=0$	Ecuación general de L_2

Trabajando con las ecuaciones de L_1 y L_2:

L_1 : $y=m_1x+b_1=0.5x+2$

$m_1=0.5$ $\quad$ $b_1=2$ $\quad$ Valores de pendiente y ordenada al origen de L_1

L_2 : $y=m_2x+b_2=-2x+1$

$m_2=-2$ $\quad$ $b_2=1$ $\quad$ Valores de pendiente y ordenada al origen de L_2

Vemos en las ecuaciones anteriores que :

$m_1 = -1/m_2$

La representación gráfica del problema está indicada en la Figura 2.27

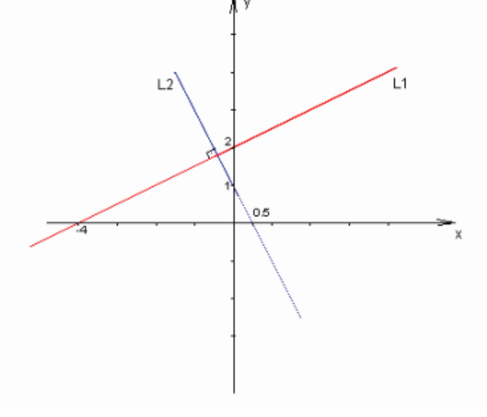


Figura 2.27.

✘ Ejercicio 2.27.

Dado un plano π_1 expresado por medio de su ecuación vectorial paramétrica:

$(x, y, z)=(0, 0, 0)+t_1(1, 2, 3)+t_2(-2, 1, 0);$ $\quad$ t_1 y $t_2 \in R$

- Calcule la distancia del punto A(3,3,3) al plano dado.

- Halle un plano π_2 que forme un ángulo de 90° con el plano dado y con el plano *xz*, pasando por el punto Q(1,1,1).

- Halle la ecuación del plano π_3, que pasa por la intersección de los planos π_1 y π_2 y por el punto W(2,-2, 1).

- Halle la ecuación de un plano π_4, normal a los planos anteriores y que pase por el origen de coordenadas.

- Determine el punto de intersección de los planos encontrados en los incisos anteriores.

✘ Ejercicio 2.28.

Ejercicio de integración propuesto. El problema de la antena.

Se dispone de una antena de telecomunicaciones cuya altura total es de 66 m. La misma se encuentra sobre un terreno que no posee pendiente en ninguna de sus direcciones.

La antena se encuentra montada verticalmente sobre este terreno.

Los puntos de anclaje de los tensores de la antena son los puntos A, B y C y se encuentran ubicados según la Figura 2.28.

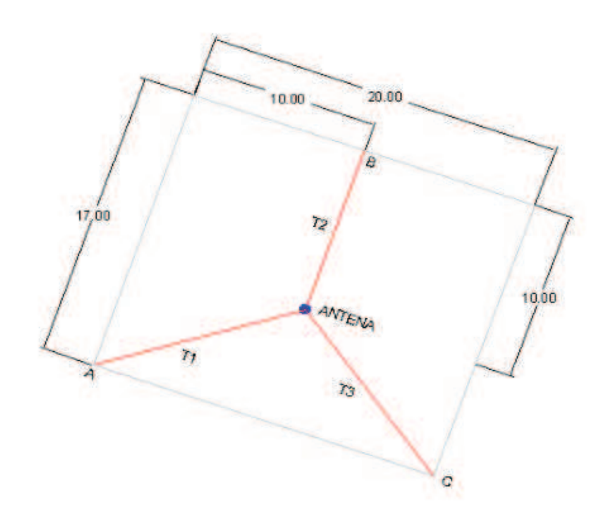


Figura 2.28.

Colocando el origen del sistema de referencia en el punto de apoyo de la antena, se solicita hallar lo siguiente:

a) La ecuación general de los tensores T_1, T_2, T_3

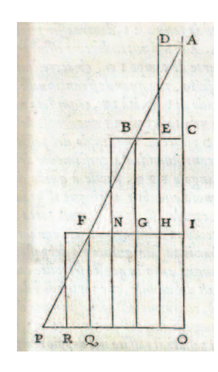
b) La longitud de los mismos.

c) El ángulo que forman entre si estos tensores.

d) Las coordenadas de los nuevos puntos de anclajes A', B', C' para el caso de que la altura de la antena sea de 85m y se desee mantener las direcciones que poseen estos tensores actualmente.

Capítulo 3:

Secciones Cónicas



"La filosofía está escrita en ese grandísimo libro abierto ante los ojos; quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto"

Galileo Galilei

3.1 INTRODUCCIÓN

En el siglo IV a.c., el matemático griego *Menaechmus* descubrió las secciones cónicas, pero un siglo después otro matemático griego *Apolonio* (262 a.c.-200 a.c.) las estudió detalladamente y escribió su tratado sobre estas curvas. Si bien aún no se disponía de la geometría analítica, estudió estas figuras al cortar un cono con distintos planos. Recién en el siglo XVI, el filósofo y matemático francés *René Descartes* desarrolló un método, la geometría analítica, para relacionar las curvas con ecuaciones. El matemático *Johan de Witt*, contemporáneo de *Descartes*, llegó al

resultado que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas.

El nombre de ***secciones cónicas*** o simplemente ***cónicas***, deriva del hecho que estas curvas pueden obtenerse a partir de la intersección de un cono circular recto con planos que no pasan por el vértice del cono. (Figura 3.1).

El cono circular recto, es una superficie en el espacio tridimensional generada por el movimiento de una recta G, llamada *generatriz*, que corta a una recta fija E, eje del cono, en un punto fijo V, denominado *vértice* del cono, con un ángulo constante θ, siendo $0 < \theta < \pi/2$. Si el plano secante es paralelo a una generatriz, la cónica se denomina ***parábola***. Si no lo es, la cónica se llama ***hipérbola*** o ***elipse*** según el plano corte a las dos hojas del cono o a una sola. Cuando el plano es perpendicular al eje del cono, se obtiene una ***circunferencia***.

Las *secciones cónicas* permiten describir resultados en la naturaleza y en astronomía. Se utilizan en la elaboración de instrumentos ópticos y acústicos y presentan una gran variedad de aplicaciones en ingeniería y en arquitectura.

En este Capítulo definiremos cada una de las secciones cónicas como lugares geométricos, es decir, como conjuntos de puntos del plano que satisfacen una determinada condición. A partir de las definiciones, encontraremos las ecuaciones correspondientes y graficaremos las curvas. Estudiaremos también las posiciones relativas entre una recta y una cónica. Finalmente describiremos algunas propiedades importantes de las secciones cónicas y sus aplicaciones.

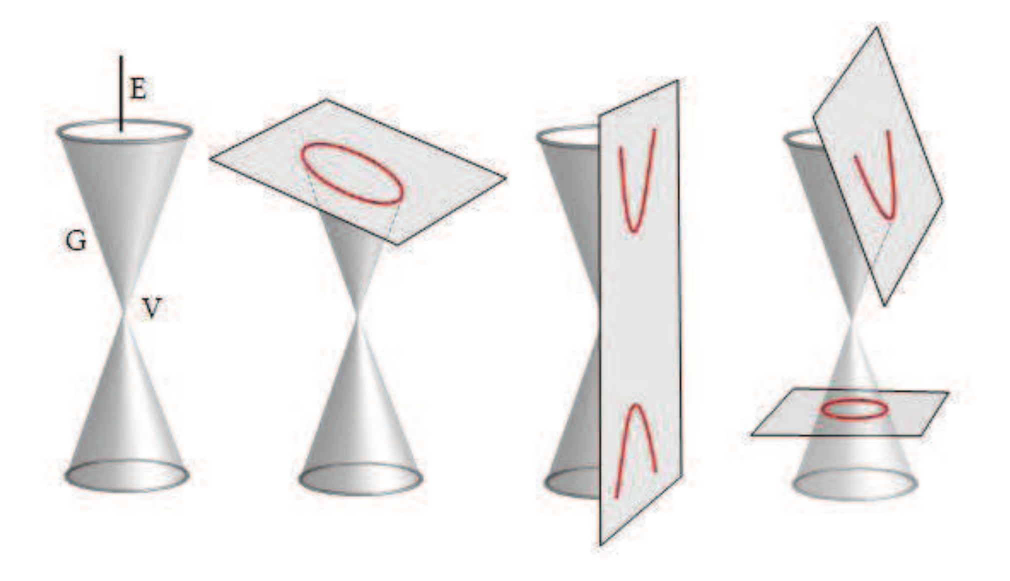


Figura 3.1.

3.2 ECUACIÓN GENERAL COMPLETA DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

La ecuación general completa de segundo grado (o cuadrática) en dos variables x e y, se puede expresar de la forma:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Las *cónicas* son las representaciones geométricas de dichas ecuaciones de segundo grado en las coordenadas x e y. Si bien describiremos en detalle cada una de las secciones cónicas y sus respectivas ecuaciones en los apartados que siguen, interpretaremos aquí, en forma genérica, qué representan los términos de la ecuación cuadrática general.

Los tres primeros términos de dicha ecuación constituyen los *términos cuadráticos*. En particular, el segundo término $2Bxy$ se lo denomina *término rectangular* o de producto cruzado. Los dos términos que siguen Dx; Ey son los *términos lineales*. Finalmente, el último término, es decir F, se lo denomina *término independiente*.

Por otra parte, desde el punto de vista de la ubicación de la cónica en el sistema coordenado xy, distinguiremos los siguientes casos:

- *Cónica en su posición* ***estándar*** *o* ***canónica***: cuando la sección cónica tiene *centro* (o *vértice* según corresponda), coincidente con el origen de coordenadas y sus ejes coinciden con los ejes coordenados.
- *Cónica* ***trasladada***: cuando la cónica tiene *centro* (o *vértice,* según corresponda*)* en un punto distinto del origen de coordenadas y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados.
- *Cónica* ***rotada***: cuando sus ejes están girados o rotados respecto de los ejes coordenados y su *centro* (o *vértice,* según corresponda*)* coincide con el origen de coordenadas.
- *Cónica* ***roto-trasladada***: cuando sus ejes están girados o rotados respecto de los ejes coordenados y su *centro* (o *vértice,* según corresponda*)* no coincide con el origen de coordenadas.

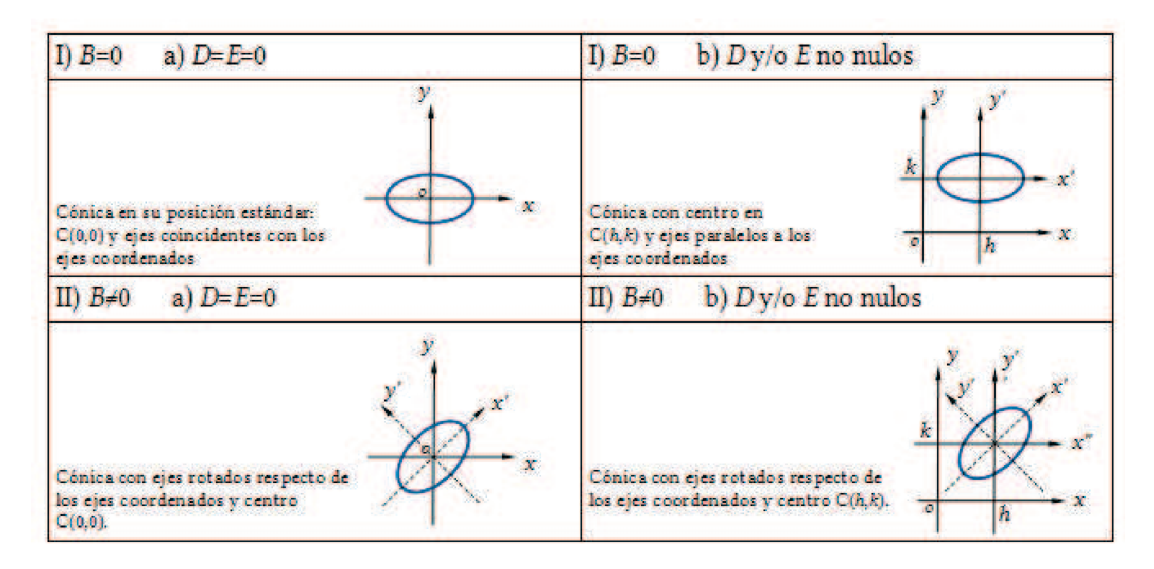
- ¿Qué relación existe entre estas posibles posiciones de la cónica en el sistema coordenado xy y la ecuación cuadrática completa de segundo grado en dos variables?

- Si en la ecuación completa de segundo grado en dos variables, no figura el término rectangular $2Bxy$, es decir, B=0, esto indica que la cónica tiene sus ejes coincidentes o paralelos a los ejes coordenados. Si aparece en la ecuación algún término lineal Dx o Ey o ambos, significa que el centro (o vértice) de la cónica no coincide con el origen de coordenadas. Si ambos

términos lineales están ausentes en la ecuación, es decir $D=E=0$, implica que el centro (o vértice) de la cónica coincide con el origen de coordenadas.

- Si en la ecuación completa de segundo grado en dos variables, figura el término rectangular $2Bxy$, es decir, $B\neq 0$, esto indica que la cónica tiene sus ejes rotados respecto a los ejes coordenados. Si además aparece en la ecuación algún término lineal Dx o Ey o ambos, significa que el centro (o vértice) de la cónica no coincide con el origen de coordenadas. Si ambos términos lineales son nulos, es decir $D=E=0$, implica que el centro (o vértice) de la cónica coincide con el origen de coordenadas.

La siguiente Tabla 3.1 sintetiza los casos descriptos precedentemente:



I) $B=0$ a) $D=E=0$	I) $B=0$ b) D y/o E no nulos
Cónica en su posición estándar: C(0,0) y ejes coincidentes con los ejes coordenados	Cónica con centro en C(h,k) y ejes paralelos a los ejes coordenados
II) $B\neq 0$ a) $D=E=0$	II) $B\neq 0$ b) D y/o E no nulos
Cónica con ejes rotados respecto de los ejes coordenados y centro C(0,0).	Cónica con ejes rotados respecto de los ejes coordenados y centro C(h,k).

Tabla 3.1.

Comenzaremos estudiando el problema I de la primera fila de la tabla anterior y en el último Capítulo retomaremos el estudio de las secciones cónicas para abordar el caso II de la tabla.

Iniciamos nuestro desarrollo del caso I con la circunferencia.

3.3 CIRCUNFERENCIA

3.3.1 Definición de circunferencia

Definición: La ***circunferencia*** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado ***centro***. La distancia de un punto cualquiera de la circunferencia al centro se llama ***radio***.

3.3.2 Ecuaciones cartesiana y general de una circunferencia

- *Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas:*

Datos:

Centro de la circunferencia: C(0, 0)

Radio de la circunferencia: r

Punto genérico de la circunferencia: P(x, y)

A partir de la definición de circunferencia, planteamos que: (ver Figura 3.2)

$\|\boldsymbol{OP}\| = r\,; \qquad \boldsymbol{OP} = (x, y)$

$\sqrt{x^2 + y^2} = r$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación ***cartesiana*** de una circunferencia de radio r y centro C(0,0)

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Ecuación ***general*** de una circunferencia de radio r y centro C(0,0)

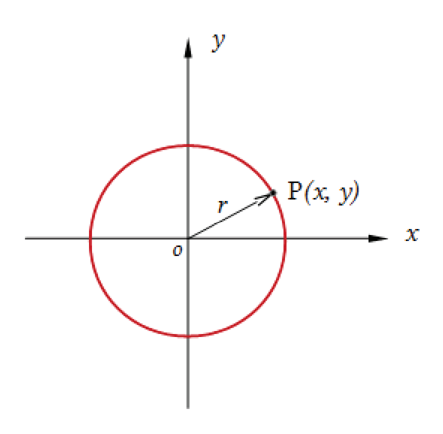


Figura 3.2.

Cabe señalar que la ecuación cartesiana de la circunferencia también suele denominarse ecuación canónica, normal u ordinaria.

- *Si el centro de la circunferencia no coincide con el origen de coordenadas:*

Datos:

Centro de la circunferencia: C(h, k)

Radio de la circunferencia: r

Punto genérico de la circunferencia: P(x, y)

A partir de estos datos y procediendo de la misma manera que en el caso anterior, planteamos: (ver Figura 3.3)

$\|\boldsymbol{CP}\| = r\,; \qquad \boldsymbol{CP} = (x - h, y - k)$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación *cartesiana* de una circunferencia de radio r y centro C(h,k)

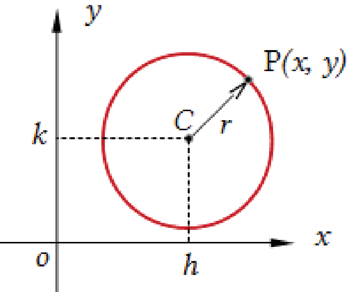


Figura 3.3.

Desarrollando y dejando todos los términos en el primer miembro, obtenemos la siguiente ecuación general de una circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Ecuación ***general*** de una circunferencia de radio r y centro $C(h,k)$

Si comparamos esta última ecuación con la ecuación general para una cónica: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, podemos ver que:

- $A=C=1$
- $B=0$
- $D=-2h \quad \Rightarrow \quad h=-D/2$
- $E=-2k \quad \Rightarrow \quad k=-E/2$
- $F=h^2+k^2-r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$

Observamos que para que el radio sea un número real, debe cumplirse que:

$h^2+k^2-F \geq 0$

Si el radio es cero, entonces la ecuación cuadrática representa un único punto.

3.3.3 Traslación de ejes

Hemos visto que la ecuación de la circunferencia de radio r, con centro en el origen de coordenadas, tiene la forma simple:

$$x^2+y^2=r^2$$

Si el centro de la circunferencia no coincide con el origen de coordenadas, la ecuación correspondiente puede expresarse en alguna de las dos formas vistas:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Esto ilustra el hecho de que la sencillez de la ecuación de una curva está relacionada con la posición relativa de la curva con los ejes coordenados. El proceso de cambiar de un par de ejes coordenados a otros, se denomina ***transformación de coordenadas***.

La transformación de coordenadas más general es aquella en la cual los nuevos ejes no son paralelos a los ejes originales y sus orígenes no coinciden. Este caso lo estudiaremos en el último Capítulo. Ahora consideraremos aquellas transformaciones de coordenadas en las cuales los nuevos ejes son paralelos a los originales y con los mismos sentidos. Este tipo de transformaciones se denomina ***traslación de ejes***.

- ¿Cómo cambian las coordenadas de un punto cualquiera del plano debido a una traslación de ejes?

En la Figura 3.4 podemos observar que los nuevos ejes x' e y' son paralelos a los ejes x e y. Las coordenadas del nuevo origen O', se representan con (h, k). Es decir, los nuevos ejes se pueden obtener a partir de los anteriores desplazando h unidades horizontalmente y k unidades en sentido vertical, manteniendo sus direcciones y sentidos positivos. Designamos con (x, y) las coordenadas de un punto cualquiera del plano con respecto a los ejes originales, en tanto que (x', y') indican las coordenadas del mismo punto con respecto a los nuevos ejes. A partir de la Figura 3.4, vemos que:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Ecuaciones de traslación

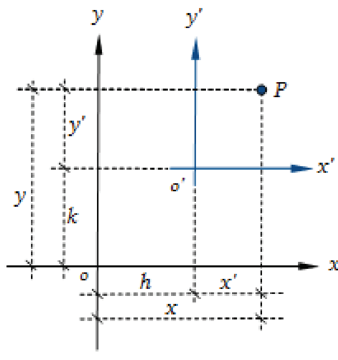


Figura 3.4.

Entonces, la sustitución de las variables x e y en la ecuación de una curva referida a los ejes originales, por las expresiones recién obtenidas, permite encontrar la ecuación de la misma curva, referida a los nuevos ejes trasladados.

✘ Ejercicio 3.1.

Se realiza una traslación de ejes con el punto (2,-2) como nuevo origen de coordenadas.

a) Encuentre las nuevas coordenadas del punto Q(5,-1). Verifique gráficamente.

b) Encuentre la ecuación de la siguiente circunferencia, en el nuevo sistema de ejes:

$$x^2+y^2-4x+4y+4=0$$

✘ Respuesta Ejercicio 3.1.

a) Las ecuaciones de traslación resultan:

$$\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'-2 \end{cases}$$

Siendo las coordenadas del punto Q(5,-1) respecto del sistema original, las nuevas coordenadas resultan:

$$\begin{cases} 5=x'+2 & \rightarrow & x'=3 \\ -1=y'-2 & \rightarrow & y'=1 \end{cases}$$

$Q(3,1)_{x'y'}$

b) Sustituimos las expresiones para x e y en términos de x' e y' en la ecuación dada:

$(x'+2)^2+(y'-2)^2-4(x'+2)+4(y'-2)+4=0$

$x'^2+4x'+4+y'^2-4y'+4-4x'-8+4y'-8+4=0$

$x'^2+y'^2=4$	Circunferencia de radio r=2 y centro C(2,-2)

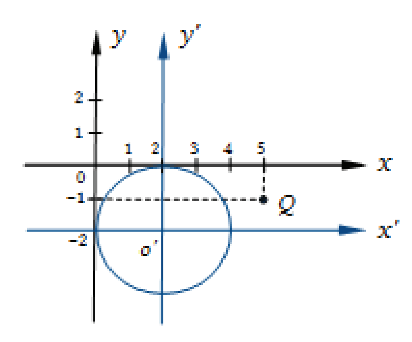


Figura 3.5.

3.3.4 Tipos de problemas

Tenemos dos tipos de posibles problemas a resolver en el estudio de las secciones cónicas:

a) Conocidos los elementos de la cónica (en el caso que estamos estudiando en este apartado, el *centro* y el *radio* de la circunferencia), encontrar la ecuación de la misma.

b) Dada la ecuación cuadrática, identificar de qué cónica se trata y encontrar sus elementos.

✘ Ejercicio 3.2.

A partir de los siguientes datos, escriba la ecuación de la circunferencia correspondiente:

a) Centro C(0,0); radio r=3

b) Centro C(-3,4); radio r=7

✘ Respuesta Ejercicio 3.2.

a) $x^2+y^2=9$

b) $(x+3)^2+(y-4)^2=49$

✘ Ejercicio 3.3.

Indique la cónica que representa cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2+2y^2-12x-8y-6=0$

b) $2x^2+2y^2-4x-8y+10=0$

c) $x^2+y^2+2x-4y+6=0$

✘ Respuesta Ejercicio 3.3.

Si bien a partir de la ecuación general de la circunferencia, podemos obtener las coordenadas del centro y el valor del radio usando las expresiones ya vistas, describiremos un procedimiento que nos permitirá trabajar con cualquier ecuación cuadrática, pudiendo identificar con el mismo las restantes cónicas que aún no hemos estudiado.

a) Dada la ecuación cuadrática, en primer lugar, agrupamos los términos en x e y:

$(2x^2-12x)+(2y^2-8y)-6=0$

Luego sacamos factor común en cada paréntesis, de forma tal que los términos en x^2 e y^2 tengan coeficientes iguales a 1:

$2(x^2-6x)+2(y^2-4y)-6=0$

A continuación, completamos cuadrados en cada uno de los paréntesis, recordando que para ello se debe considerar:

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

En nuestra ecuación resulta:

$2(x^2-6x+9-9)+2(y^2-4y+4-4)-6=0$

$2(x-3)^2-18+2(y-2)^2-8-6=0$

$2(x-3)^2+2(y-2)^2=32$

$(x-3)^2+(y-2)^2=16$ Ecuación de una circunferencia de radio $r=4$ y centro C(3,2).

b) Efectuamos el mismo procedimiento anterior con la segunda ecuación:

$(2x^2-4x)+(2y^2-8y)+10=0$

$2(x^2-2x)+2(y^2-4y)+10=0$

$2(x^2-2x+1-1)+2(y^2-4y+4-4)+10=0$

$2(x-1)^2-2+2(y-2)^2-8+10=0$

$2(x-1)^2+2(y-2)^2=0$

¿Qué valores de x e y satisfacen esta ecuación?

Tenemos una suma de dos términos que son siempre positivos o nulos, igualados a 0. La única opción para satisfacer esta igualdad es que cada uno de los términos sea nulo. Es decir:

$x-1=0 \Rightarrow$ $x=1$

$y-2=0 \Rightarrow$ $y=2$

La gráfica de esta ecuación cuadrática, corresponde a un único punto. Suele decirse que la ecuación cuadrática dada corresponde a una *circunferencia puntual*.

c) Resolvemos el último inciso con el mismo procedimiento:

$(x^2+2x)+(y^2-4y)+6=0$

$(x^2+2x+1-1)+(y^2-4y+4-4)+6=0$

$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+6=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=-1$

Ningún par de valores (x,y) satisface esta ecuación. Es decir, no existe un lugar geométrico que quede representado por la ecuación cuadrática del inciso c).

Los ejemplos vistos en el Ejercicio 3.3 ilustran tres casos posibles que podemos generalizar como indicaremos a continuación.

Dada la ecuación cuadrática en dos variables: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, la *condición necesaria* para que sea una circunferencia es que los coeficientes A y C sean iguales y no nulos. Si se cumple esta condición, completamos cuadrados con el procedimiento ya descripto y llegamos a la siguiente expresión:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=M$$

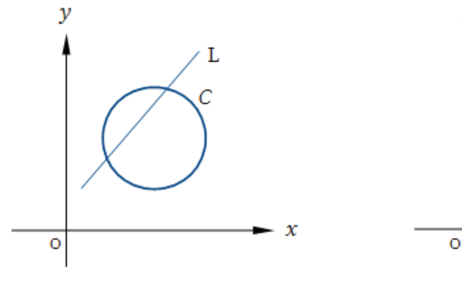
- Si M>0, se obtiene una circunferencia de radio $\sqrt{M}$ y centro C(h,k)
- Si M=0, se obtiene una circunferencia puntual, es decir el punto P(h,k), es el único punto que satisface la ecuación.
- Si M<0, no existe lugar geométrico que quede representado por esta ecuación cuadrática dada.

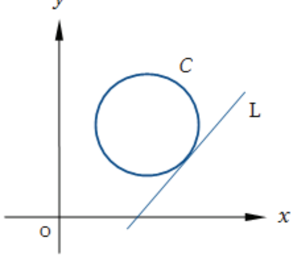
En síntesis, la *condición necesaria y suficiente* para que la ecuación cuadrática $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ represente una circunferencia, es que los coeficientes A y C sean iguales y no nulos y que el término independiente, luego de completar cuadrados y pasado al segundo miembro, sea mayor que cero.

3.3.5 Posiciones relativas entre recta y circunferencia

Dada una recta y una circunferencia, las posibles posiciones relativas entre ambas son: (Figura 3.6):

- La recta es ***secante*** a la circunferencia, es decir la corta en dos puntos.
- La recta es ***tangente*** a la circunferencia, es decir, la corta en un solo punto.
- La recta es ***exterior*** a la circunferencia, es decir, no tienen punto de intersección.





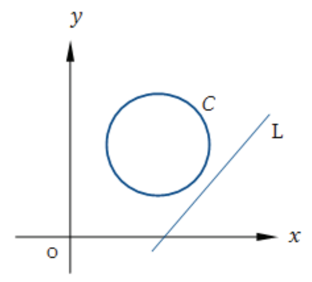


Figura 3.6.

Para determinar la posición relativa entre una recta y una circunferencia dadas, buscamos el o los *puntos de intersección* (si es que existen) entre ambos lugares geométricos, planteando el siguiente sistema de dos ecuaciones, una cuadrática y otra lineal:

$$\begin{matrix} C: \\ L: \end{matrix} \begin{cases} Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, despejamos de la ecuación de la recta una cualquiera de las dos variables y la sustituimos en la otra ecuación. Obtenemos de este modo una ecuación de segundo grado en una única variable, de la forma: $ax^2+bx+c=0$ (o también podría resultar expresada en términos de la variable y). Para encontrar las raíces planteamos:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si b^2-4ac > 0, obtenemos dos soluciones reales y distintas, que nos conducen a dos puntos solución del sistema de ecuaciones lineales. Es así que la recta y la circunferencia tienen dos puntos en común. Por lo tanto, se dice que la recta L es ***secante*** a la circunferencia.

- Si b^2-4ac = 0, obtenemos dos raíces reales e iguales, lo que nos conduce a un único punto solución del sistema de ecuaciones lineales. Es decir, la recta y la circunferencia tienen un único punto en común, o sea, la recta L es ***tangente*** a la circunferencia.

- Si b^2-4ac < 0, obtenemos raíces complejas conjugadas y por lo tanto no existe intersección entre la recta y la circunferencia dadas. Se dice que la recta es ***exterior*** a la circunferencia.

✘ Ejercicio 3.4.

Dada la circunferencia de ecuación $(x-2)^2+y^2=25$ y las siguientes rectas, determine para cada una de ellas su posición relativa con respecto a la cónica dada. Verifique gráficamente sus respuestas:

a) L_1: $3x+4y-6=0$

b) L_2: $3x+4y-31=0$

c) L_3: $3x+4y-60=0$

✘ Respuesta Ejercicio 3.4.

a) L_1 es *secante* a la circunferencia.

b) L_2 es *tangente* a la circunferencia en el punto T(5,4).

c) L_3 es *exterior* a la circunferencia.

3.3.6 Ecuación de la recta tangente a una circunferencia por un punto de la misma

Dada la circunferencia de radio r y centro C(h,k), escribimos su ecuación cartesiana:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

o bien, la ecuación general que se obtiene desarrollando la anterior:

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

donde $D=-2h$, $E=-2k$ y $F=h^2+k^2-r^2$

Para obtener la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera T(x_T,y_T) de la circunferencia (ver Figura 3.7), derivamos implícitamente la última ecuación, obteniendo:

$2x+2yy'+D+Ey'=0$

Agrupamos los términos que dependen de y' y despejamos, obteniendo de este modo la siguiente relación:

$$y' = \frac{-2x-D}{2y+E}$$

Esta expresión nos permite evaluar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la circunferencia. En particular, nos interesa en el punto T(x_T,y_T), es decir:

$$y'_T = \frac{-2x_T-D}{2y_T+E}$$

donde $2y_T+E$ es no nulo.

A continuación escribimos la ecuación de la recta L_T que tiene por pendiente a y'_T y que pasa por el punto (x_T,y_T), que es la ecuación de la recta tangente buscada:

$$L_T: \quad y-y_T = \left(\frac{-2x_T-D}{2y_T+E}\right)(x-x_T)$$

Demostraremos ahora que esta recta tangente es siempre perpendicular al segmento que une el centro de la circunferencia con el punto de tangencia (ver Figura 3.7).

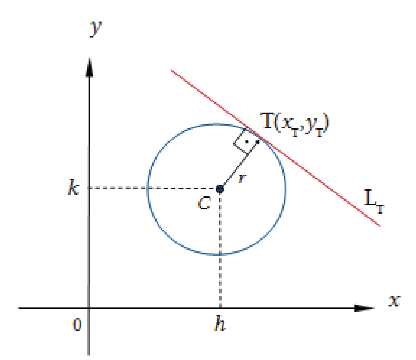


Figura 3.7.

Para ello, desarrollaremos la última ecuación obtenida para encontrar así la ecuación general de la recta tangente:

$(2y_T+E)(y-y_T)+(2x_T+D)(x-x_T)=0$

$(2y_T+E)y+(2x_T+D)x-[(2y_T+E)y_T+(2x_T+D)x_T]=0$

Como ya sabemos, en esta expresión de la ecuación de la recta, los coeficientes que acompañan a las variables x e y, constituyen las componentes de un vector normal $\boldsymbol{n}_L$ a la recta dada. Es decir:

$\boldsymbol{n}_L=(2x_T+D,\ 2y_T+E)$

Determinamos ahora las componentes del vector que tiene punto inicial en el centro de la circunferencia y extremo en el punto de tangencia:

$\boldsymbol{CT}=(x_T-h,\ y_T-k)=(x_T+D/2,\ y_T+E/2)$

Observamos que: $\boldsymbol{n}_L=2\boldsymbol{CT}$

Es decir, el vector normal $\boldsymbol{n}_L$ a la recta tangente es paralelo al vector $\boldsymbol{CT}$. Por lo tanto, la recta tangente a la circunferencia en cualquier punto T de la misma, resulta perpendicular al segmento que une el centro de la circunferencia con el punto de tangencia.

✘ Ejercicio 3.5.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-4x-21=0$, en el punto T(5,4).

b) Verifique, gráfica y analíticamente, que dicha recta tangente es perpendicular al segmento que une el centro de la circunferencia dada con el punto T de tangencia.

✘ Respuesta Ejercicio 3.5.

a) L_T: $3x+4y-31=0$

3.3.7 Ecuaciones paramétricas de una circunferencia

Estudiaremos la situación en la cual cada una de las variables x e y es especificada en términos de una tercera variable, denominada *parámetro*.

> **Definición:** Si existen funciones f y g, con un dominio $Đ$ común, las ecuaciones $x=f(t)$ e $y=g(t)$, para t en $Đ$, son ecuaciones paramétricas de la curva, que consiste en todos los punto $(f(t), g(t))$ para t en el dominio $Đ$. La variable t se denomina *parámetro*.

Si tenemos una curva dada por medio de sus ecuaciones paramétricas, podemos encontrar su ecuación cartesiana, eliminando el parámetro t.

Para graficar una curva dada por medio de sus ecuaciones paramétricas, marcamos los puntos del plano de forma tal que cada punto (x,y) queda definido para un valor determinado del parámetro t. Si interpretamos el parámetro t como una variable temporal y las coordenadas (x,y) como la posición de un móvil, por ejemplo, las ecuaciones paramétricas nos estarían indicando en qué posición se encuentra el móvil en el tiempo t.

Es decir, podemos asociar las ecuaciones paramétricas con una noción de movimiento a lo largo de la curva. Por otra parte, las ecuaciones paramétricas, tanto de curvas como de superficies, son muy importantes en computación, ya que permiten dibujar dichos lugares geométricos en la pantalla de la computadora.

. PARA LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO *r* Y CENTRO C(0,0)

A partir de la Figura 3.8, vemos que las componentes del vector ***OP*** en términos del parámetro α son:

$$\boldsymbol{OP}=(r\cos\alpha,\ r\,\text{sen}\,\alpha) \qquad 0\leq\alpha<2\pi$$

o también:

$$\boldsymbol{OP}= r\cos\alpha\ \boldsymbol{i}+ r\,\text{sen}\,\alpha\ \boldsymbol{j} \qquad 0\leq\alpha<2\pi$$

Cualquiera de estas dos expresiones se denomina ***ecuación vectorial paramétrica*** de la circunferencia de radio r y centro C(0,0). Para cada valor que adoptamos del parámetro α, obtenemos distintos puntos de la circunferencia. El rango de variación indicado para el parámetro α permite describir la circunferencia completa.

Si ahora igualamos componente a componente en cualquiera de las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\,\text{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad 0\leq\alpha<2\pi$$

las cuales constituyen las *ecuaciones cartesianas paramétricas* de la circunferencia de radio r y centro C(0,0).

La eliminación del parámetro α de las ecuaciones anteriores nos conduce a la *ecuación cartesiana* de la circunferencia. Para ello, elevamos al cuadrado ambos miembros de las dos ecuaciones y luego sumamos miembro a miembro. Es decir:

$x^2=r^2\cos^2\alpha$

$y^2=r^2\operatorname{sen}^2\alpha$

$x^2+y^2=r^2\cos^2\alpha+r^2\operatorname{sen}^2\alpha$

$x^2+y^2=r^2(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)$

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

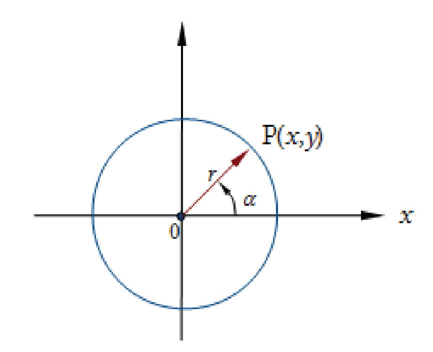


Figura 3.8.

. PARA LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO r Y CENTRO C(h,k)

A partir de la Figura 3.9, observamos que ***OP***=***OC***+***CP***. Siendo ***OC***= (h, k) y

CP= ($r\cos\alpha$, $r\operatorname{sen}\alpha$) , $0\leq\alpha<2\pi$

las componentes del vector ***OP*** en términos del parámetro α resultan:

$$\boxed{(x, y)=(h,k)+(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)} \qquad 0\leq\alpha<2\pi$$

Esta es la *ecuación vectorial paramétrica* de la circunferencia de radio r y centro C(h,k), que también puede expresarse como sigue:

$$\boxed{(x, y)=(r\cos\alpha+h, r\operatorname{sen}\alpha+k)} \qquad 0\leq\alpha<2\pi$$

Igualando componente a componente en esta última expresión, obtenemos las *ecuaciones cartesianas paramétricas* de la circunferencia de radio r y centro C(h,k):

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha+h \\ y = r\operatorname{sen}\alpha+k \qquad 0\leq\alpha<2\pi \end{cases}$$

Procedemos de la misma manera que en el caso anterior para eliminar el parámetro α:

$(x-h)^2=r^2\cos^2\alpha$

$(y-k)^2=r^2\operatorname{sen}^2\alpha$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Esta última es la ecuación cartesiana de la circunferencia de radio r y centro C(h,k) que ya habíamos estudiado anteriormente.

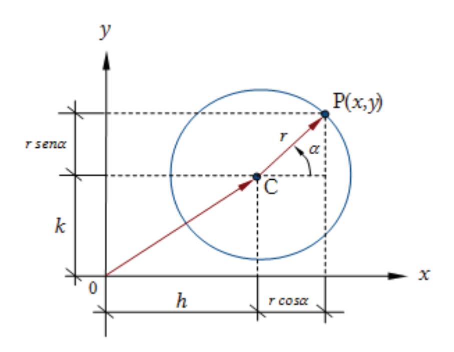


Figura 3.9.

✘ Ejercicio 3.6.

Indique las ecuaciones cartesianas paramétricas de la circunferencia de ecuación:

$x^2+y^2-2x+2y-7=0$

✘ Respuesta Ejercicio 3.6.

$$\begin{cases} x = 3\cos\alpha+1 \\ y = 3\,\text{sen}\,\alpha-1 \qquad 0\leq\alpha<2\pi \end{cases}$$

3.3.8 Familia de circunferencias

Una ***familia de circunferencias*** es un conjunto de ellas que satisfacen determinada condición. Estudiaremos dos tipos de familias de circunferencias.

3.3.8.1 Familias de circunferencias de centro C(h,k)

Para la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, vemos que especificando los datos del centro C(h,k) y del radio r, queda definida una única circunferencia. Si sólo especificamos los datos correspondientes al centro C(h,k) y dejamos el radio como una magnitud variable, tendremos una familia de circunferencias: (Figura 3.10)

$(x-h)^2+(y-k)^2=\lambda$ $\lambda \in R^+$, donde el parámetro λ es el cuadrado del radio.

C_1: $(x-h)^2+(y-k)^2=\lambda_1$

C_2: $(x-h)^2+(y-k)^2=\lambda_2$

C_3: $(x-h)^2+(y-k)^2=\lambda_3$

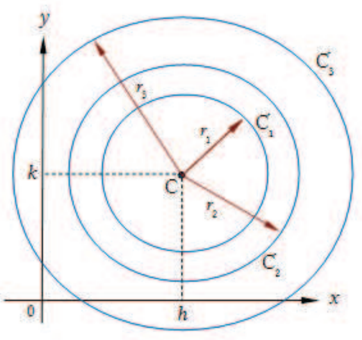


Figura 3.10.

3.3.8.2 Familia de circunferencias que pasan por la intersección de dos circunferencias dadas

En el Capítulo 2, vimos cómo encontrar la ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas y la familia de planos que pasan por la intersección de dos planos dados. De manera similar encontraremos aquí la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de dos circunferencias dadas. (Figura 3.11).

Para ello consideramos las siguientes ecuaciones de dos circunferencias que se cortan en uno o en dos puntos:

$\mathcal{C}_1$: $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$\mathcal{C}_2$: $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

Una de las formas de expresión de la familia de circunferencias es utilizando dos parámetros λ_1, λ_2 que pueden tomar valores reales:

$$\lambda_1(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\lambda_2(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

De esta manera, si hacemos $\lambda_1=0$, recuperamos la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, y con $\lambda_2=0$, obtenemos la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}_1$. El inconveniente de esta forma de expresión de la familia de circunferencias es que requerimos la utilización de dos parámetros en una sola ecuación. Una forma alternativa y más práctica es el uso de un sólo parámetro real λ:

$$(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

Para $\lambda\neq-1$, esta ecuación representa las circunferencias que pasan por la intersección de las dos circunferencias dadas. Se suele denominar a esta expresión *familia reducida de circunferencias* que pasan por la intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, ya que no incluye a la circunferencia $\mathcal{C}_2$.

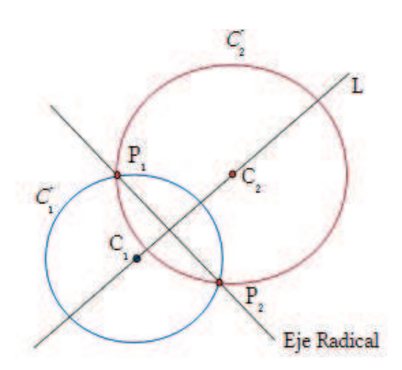


Figura 3.11.

Si $\lambda=-1$ se eliminan los términos cuadráticos y queda la ecuación de una recta denominada ***eje radical*** de las dos circunferencias dadas.

Observamos que, si sustituimos las coordenadas de un punto de intersección, P_1 o P_2, por las variables x e y en la ecuación de la familia reducida de circunferencias resulta: $0+\lambda.0=0$, ya que las coordenadas del punto de intersección cumplen con las ecuaciones de ambas circunferencias. Dicha igualdad nos dice que, siendo P_1 y P_2 puntos de intersección de las dos circunferencias dadas, estos puntos también satisfacen la ecuación de la familia reducida de circunferencias, para todo valor del parámetro λ.

Para mostrar que la curva dada por esa ecuación es una circunferencia, agrupamos las variables y obtenemos:

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(D_1+\lambda D_2)x+(E_1+\lambda E_2)y+(F_1+\lambda F_2)=0$$

Vemos que los coeficientes que acompañan a los términos cuadráticos son iguales, es decir, se cumple la *condición necesaria* para que dicha ecuación represente a una circunferencia. Resta por demostrar que, luego de completar cuadrados, el término independiente M resulta siempre mayor que 0, lo cual queda sugerido como ejercicio para el estudiante.

Si en la ecuación anterior sustituimos $\lambda=-1$, obtenemos:

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

Dicha ecuación corresponde al *eje radical* (ER) de las dos circunferencias dadas y que también, como todo lugar geométrico que satisface la ecuación anterior, pasa por los puntos de intersección de las dos circunferencias.

De la ecuación del eje radical obtenida vemos que un vector normal al mismo está dado por: $\boldsymbol{n}_{ER}=((D_1-D_2),(E_1-E_2))$.

Por otra parte, el vector que une los centros de las dos circunferencias dadas queda expresado como sigue:

$$\boldsymbol{C_1C_2}=(h_2-h_1,k_2-k_1)=\left(-\frac{D_2}{2}-\left(-\frac{D_1}{2}\right)\right),\left(-\frac{E_2}{2}-\left(-\frac{E_1}{2}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{C_1C_2}=\left(\frac{D_1-D_2}{2},\frac{E_1-E_2}{2}\right)$$

Observamos entonces que un vector $\boldsymbol{n}_{ER}$ normal al eje radical es paralelo al vector $\boldsymbol{C_1C_2}$ que une los centros de las dos circunferencias dadas. Por lo tanto, el eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias dadas, (Figura 3.12).

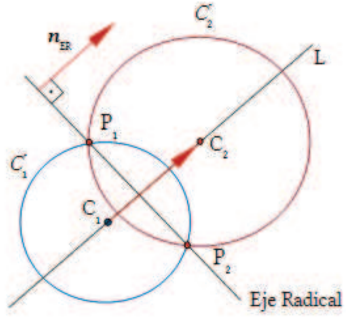


Figura 3.12.

✘ Ejercicio 3.7.

Demuestre que el centro de cualquier circunferencia que pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de dos circunferencias dadas, pertenece a la recta L que pasa por los centros de las circunferencias dadas.

✘ Ejercicio 3.8.

a) Escriba la ecuación de la familia de circunferencias que pasa por la intersección de $\acute{C}_1$ y $\acute{C}_2$.

$\acute{C}1$: $x^2+y^2-25=0$

$\acute{C}2$: $x^2+y^2-10x+10y+25=0$

b) Halle la ecuación del eje radical (ER) de las dos circunferencias dadas.

c) Verifique gráfica y analíticamente, que el eje radical (ER) es perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias dadas.

d) Determine la ecuación de la circunferencia $\acute{C}_3$, que pertenece a la familia de circunferencias dadas y cuyo centro tiene ordenada -5/2.

e) Evalúe la longitud de la cuerda común a las circunferencias dadas.

✘ Respuesta Ejercicio 3.8.

a) De acuerdo a las expresiones vistas, escribimos la ecuación de la familia de circunferencias reducida, que pasa por la intersección de las dos circunferencias dadas:

$x^2+y^2-25+\lambda(x^2+y^2-10x+10y+25)=0 \qquad \lambda \in R$

b) A los efectos de encontrar la ecuación del eje radical de la familia de circunferencias, sustituimos λ=-1 en la expresión anterior:

$x^2+y^2-25+(-1)(x^2+y^2-10x+10y+25)=0$

$x^2+y^2-25-x^2-y^2+10x-10y-25=0$

$\boxed{x-y-5=0}$

De esta última ecuación surge que $\boldsymbol{n}_{\mathbf{LER}}=(1,-1)$. O también: $\boldsymbol{d}_{\mathbf{LER}}=(1,1)$

c) El centro de la circunferencia $\acute{C}_1$ es: $C_1(0,0)$

El centro de la circunferencia $\acute{C}_2$ es: $C_2(-D_2/2, -E_2/2)$ $C_2(5, -5)$

Por lo tanto, el vector $\boldsymbol{C_1C_2}$ es: $\boldsymbol{C_1C_2}=(5,-5)$

Un vector director del eje radical es: $\boldsymbol{d}_{\mathbf{LER}}=(1,1)$

El producto escalar $\boldsymbol{d}_{\mathbf{LER}}.\boldsymbol{C_1C_2}$ es: $\boldsymbol{d}_{\mathbf{LER}}.\boldsymbol{C_1C_2}=(1,1).(5,-5)=0$

Siendo nulo el producto escalar $\boldsymbol{d}_{\mathbf{LER}}.\boldsymbol{C_1C_2}$, concluimos que los vectores son perpendiculares. Es decir, el eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias dadas (ver Figura 3.13). Cabe señalar que podríamos haber comparado también los vectores $\boldsymbol{n}_{\mathbf{LER}}$ y $\boldsymbol{C_1C_2}$, observando que

son paralelos y por lo tanto, la recta que une los centros y el eje radical son perpendiculares.

d) A los efectos de encontrar la ecuación de la circunferencia C_3, reordenamos los términos de la ecuación de la familia de circunferencias hallada en el inciso a):

$x^2(1+\lambda)+y^2(1+\lambda)-10\lambda x+10\lambda y+25(\lambda-1)=0 \qquad \lambda \in R$

Dividimos la expresión anterior por (1+λ) para obtener coeficientes unitarios en los términos cuadráticos:

$$x^2+y^2-10\frac{\lambda}{(1+\lambda)}x+10\frac{\lambda}{(1+\lambda)}y+25\frac{(\lambda-1)}{(1+\lambda)}=0 \ ; \quad \lambda \in R-\{-1\}$$

Sabemos, por ser dato del problema, que el centro de la circunferencia C_3 tiene ordenada -5/2. Por lo tanto,

$k_3=-E/2=-5/2$

Luego tendremos:

$$-\frac{10}{2}\frac{\lambda}{(1+\lambda)}=-\frac{5}{2}$$

Es decir: $\boxed{\lambda=1}$

Reemplazando λ=1 en la ecuación de la familia de circunferencias, obtendremos la ecuación de la circunferencia C_3:

$x^2(1+1)+y^2(1+1)-10x+10y+25(1-1)=0$

$2x^2+2y^2-10x+10y=0$

C_3: $\boxed{x^2+y^2-5x+5y=0}$

e) La *cuerda común* a las dos circunferencias dadas está definida por el segmento I_1I_2, siendo I_1 e I_2 los puntos de intersección de ambas circunferencias, (ver Figura 3.13). Entonces, determinamos en primer lugar las coordenadas de dichos puntos, para lo cual es necesario resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} C_1&: \\ ER&: \end{aligned} \begin{cases} x^2+y^2-25=0 \\ x-y-5=0 \end{cases}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$x^2+(x-5)^2-25=0$

$x^2+x^2-10x+25-25=0$

$2x^2-10x=0$

$2x(x-5)=0$ Para $x_1=0 \rightarrow y_1=-5 \rightarrow$ $\boxed{I_1(0,-5)}$

Para $x_2=5 \rightarrow y_2=0 \rightarrow$ $\boxed{I_2(5,0)}$

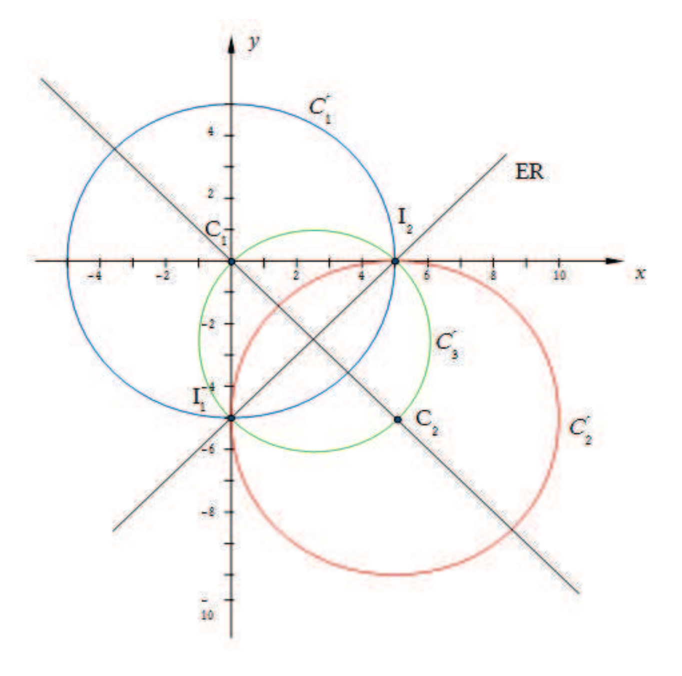


Figura. 3.13.

3.4 PARÁBOLA

3.4.1 Definición de parábola

Definición: La ***parábola*** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo llamado ***foco***, es igual a la distancia a una recta fija llamada ***directriz*** que no pasa por el foco.

En la Figura 3.14 se indica el foco de la parábola con la letra F y la recta directriz con D. El punto V, llamado ***vértice*** de la parábola, que se encuentra en el punto medio entre el foco y la directriz, sobre la perpendicular a la directriz que pasa por el foco, también debe pertenecer a la parábola, ya que cumple con la definición.

Podemos encontrar otros puntos de la parábola siguiendo el procedimiento que describimos a continuación: trazamos una recta L_1 paralela a la directriz y tomando como centro al foco F y como radio a la distancia entre las rectas L_1 y D, marcamos los arcos que cortan a L_1 en los puntos Q_1 y Q'_1. Repetimos los pasos indicados con la recta L_2 y los puntos Q_2 y Q'_2. Los puntos Q_i y Q'_i marcados, equidistan del foco y de la directriz, y por lo tanto se encuentran sobre la parábola.

Observamos que la recta que pasa por el vértice y el foco bisecta a todas las cuerdas $Q_1Q'_1$, $Q_2Q'_2$, etcétera. Es por ello que se la denomina como *eje de la parábola.* La parábola es simétrica con respecto a su eje.

Aunque hemos podido ubicar puntos de la parábola aplicando solamente la definición, es más sencillo realizarlo a partir de la ecuación de la curva, la cual obtendremos en el siguiente apartado.

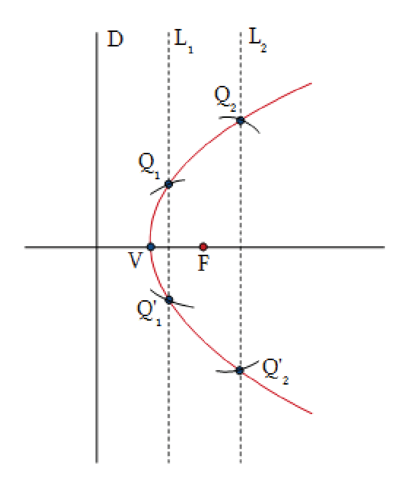


Figura 3.14.

3.4.2 Ecuaciones cartesiana y general de la parábola

Ubicamos el eje *x* sobre la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz y el origen de coordenadas coincidente con el vértice de la parábola (ver Figura 3.15). Adoptamos en primer lugar $p > 0$ como *parámetro geométrico* de la parábola que nos permitirá ubicar el foco y la directriz.

. EL VÉRTICE DE LA PARÁBOLA COINCIDE CON EL ORIGEN DE COORDENADAS

Datos:

Parámetro geométrico de la parábola:	$p > 0$
Vértice de la parábola:	V(0,0)
Foco de la parábola:	F(p/2,0)
Recta directriz:	x=-p/2
Punto genérico de la parábola:	P(x,y)

De acuerdo con la definición de parábola, cualquier punto P(x,y) de la misma, se encuentra a igual distancia del foco que de la directriz. Entonces planteamos (ver Figura 3.15):

$\|\boldsymbol{FP}\| = \|\boldsymbol{EP}\|$

Siendo E(-p/2,y), los vectores ***FP*** y ***EP*** son:

FP = (x-p/2,y) ;   ***EP*** = (x+p/2,0)

Por lo tanto, sus respectivos módulos se evalúan de la siguiente manera:

$$\|\boldsymbol{FP}\| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad \|\boldsymbol{EP}\| = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

La igualdad planteada anteriormente, entonces resulta:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Desarrollando, obtenemos:

$$x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4}$$

De donde finalmente surge:

$$\boxed{y^2=2px} \qquad p>0$$

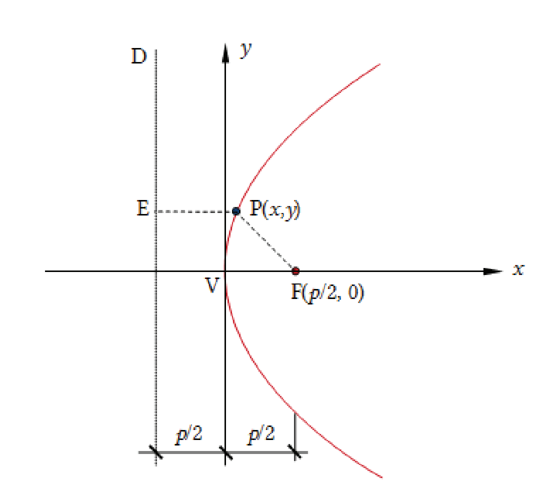


Figura 3.15.

Esta es la ecuación cartesiana de la parábola con vértice V(0,0) y foco F(p/2, 0). Siendo p>0, la variable x no puede tomar valores negativos. El eje de la parábola es el semieje positivo de las abscisas, también denominado eje focal, ya que contiene al foco. Este también constituye un eje de simetría, ya que la ecuación no se altera al cambiar y por -y. Al igual que en el caso de la circunferencia, la ecuación cartesiana de la parábola también suele denominarse ecuación *canónica*, *normal* u *ordinaria*.

. LADO RECTO

Recordamos que se denomina *cuerda* a todo segmento que une dos puntos de la curva. *Cuerda focal* es toda cuerda que contiene al foco.

El ***lado recto*** es la cuerda focal perpendicular al eje focal. Se indica LR.

Si hacemos x=p/2 en la ecuación de la parábola

$$y^2=2px \qquad p>0$$

obtenemos:

$$y=\pm p$$

Las coordenadas de los puntos A y A', extremos del lado recto son, (Figura 3.16):

A(p/2,p) ; A'(p/2,-p).

La distancia entre los puntos AA' es la longitud del lado recto:

$$|LR|=2p$$

Con los datos del vértice y los extremos del lado recto, es suficiente para esbozar la gráfica de la parábola.

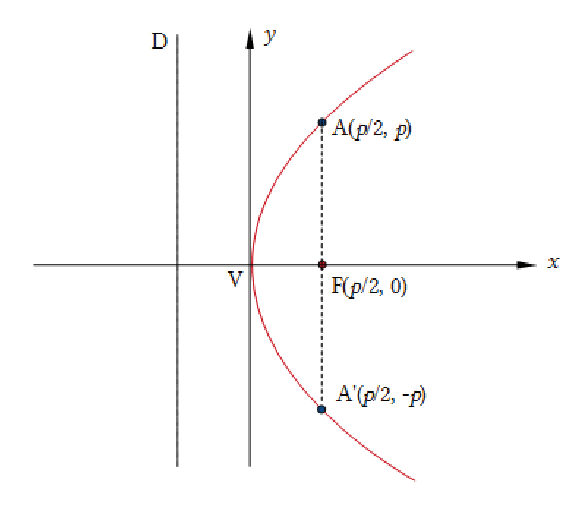


Figura 3.16.

Cuando el foco de la parábola se encuentra a la izquierda del origen de coordenadas, se adopta p < 0, el foco queda representado por F(p/2, 0), y la ecuación de la directriz es x=-p/2.

De la misma manera que en el caso anterior, siguiendo la definición de parábola, se demuestra que (Figura 3.17):

y^2=2px

sólo que ahora, siendo p < 0, la variable x no puede tomar valores positivos.

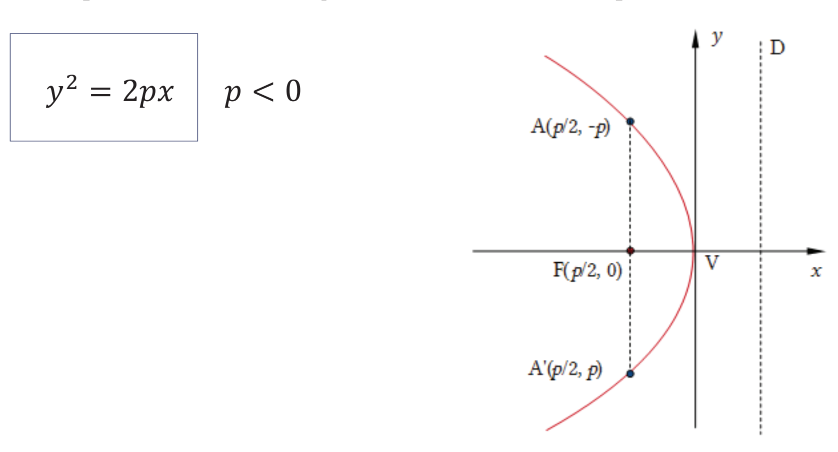


Figura 3.17.

Si el eje focal es el eje y, se intercambian x por y en todo el análisis anterior y de esta manera resulta (Figura 3.18):

$$x^2 = 2py \qquad p < 0$$

El foco ahora está dado por F(0, $p/2$) y la ecuación de la directriz es y=-$p/2$. La parábola en este caso resulta simétrica con respecto al eje y, ya que la ecuación de la misma, no se altera al cambiar x por $-x$.

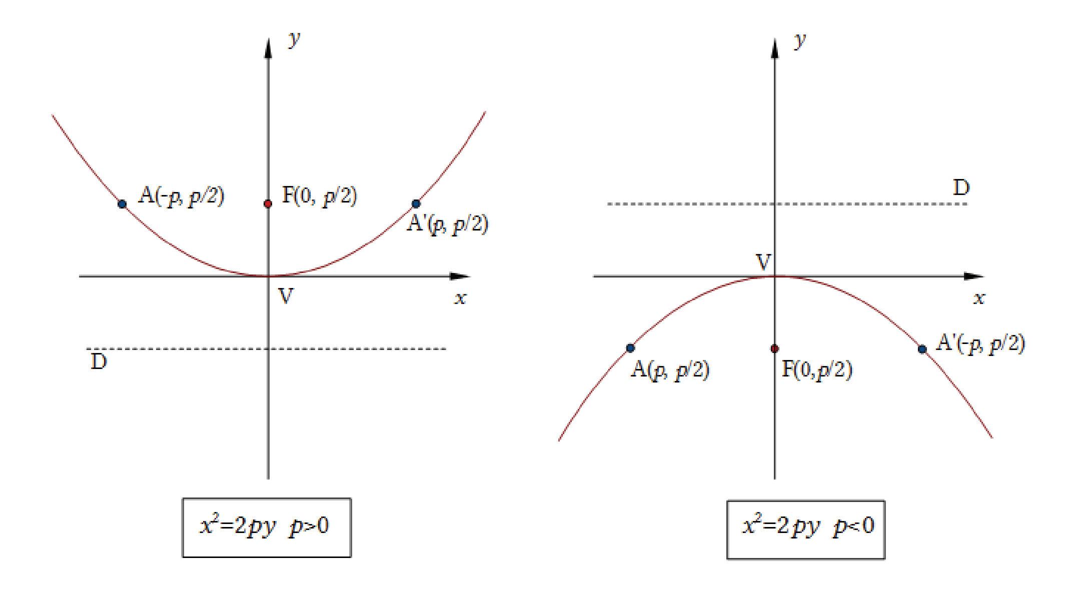


Figura 3.18.

En ambos casos estudiados, la ecuación general de la parábola toma respectivamente las siguientes formas:

y^2-2px=0	cuando el eje focal es el eje x.
x^2-2py=0	cuando el eje focal es el eje y.

Veamos a continuación las ecuaciones correspondientes a parábolas cuyos ejes son paralelos a algún eje coordenado.

. EL VÉRTICE DE LA PARÁBOLA NO COINCIDE CON EL ORIGEN DE COORDENADAS

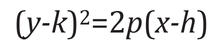
El vértice de la parábola se encuentra en el punto V(h,k). Introducimos un nuevo par de ejes coordenados $x'y'$ paralelos a los ejes xy, pero con origen de coordenadas en el punto (h,k), (ver Figura 3.19). Como la distancia del vértice al foco es $p/2$, escribimos la ecuación de la parábola en el sistema $x'y'$:

$$y'^2=2px'$$

Teniendo presentes las *ecuaciones de traslación*:

$$\begin{cases} x'=x-h \\ y'=y-k \end{cases}$$

la ecuación anterior resulta:


$(y-k)^2=2p(x-h)$

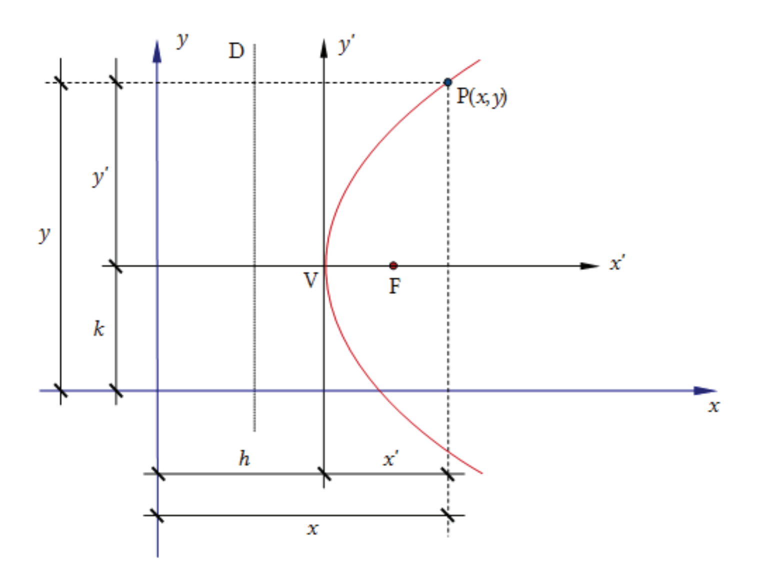


Figura 3.19.

Esta es la ecuación *cartesiana* de la parábola con vértice V(h,k), parámetro geométrico p y eje focal paralelo al eje x. Para obtener la *ecuación general*, desarrollamos la ecuación anterior y dejamos todos los términos en el primer miembro:

$$y^2-2px-2ky+k^2+2ph=0$$

Comparamos la expresión anterior con la ecuación general para una cónica $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ y vemos que:

$A=B=0$ y $C\neq0$

Observamos que, siendo $A=0$ y $C\neq0$, debe ser $D\neq0$, porque si fuera $D=0$ quedaría una ecuación de segundo grado en una sola variable $Cy^2+Ey+F=0$, cuyas dos soluciones ($y=y_1$; $y=y_2$) son dos rectas paralelas al eje x.

Procedemos de la misma manera para el caso en el que el vértice de la parábola es V(h, k) y el eje de la misma es paralelo al eje y. (Figura 3.20)

La ecuación de la parábola en el sistema $x'y'$ ahora resulta:

$$x'^2=2py'$$

y sustituyendo las ecuaciones de traslación ya vistas, obtenemos:

$$(x-h)^2=2p(y-k)$$

Esta es la *ecuación cartesiana* de la parábola con vértice V(h,k), parámetro geométrico p y eje focal paralelo al eje y. Para obtener la *ecuación general* de la misma, desarrollamos la expresión anterior y llevamos todos los términos al primer miembro, resultando:

$$x^2\text{-}2hx\text{-}2py+h^2+2pk=0$$

Comparamos esta última expresión con la la ecuación general para una cónica $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ y vemos que:

$B=C=0$ y $A\neq 0$

Observamos que, siendo $C=0$ y $A\neq 0$, debe ser $E\neq 0$, porque si fuera $E=0$ quedaría una ecuación de segundo grado en una sola variable $Ax^2+Dx+F=0$, cuyas dos soluciones ($x=x_1$; $x=x_2$) son dos rectas paralelas al eje y.

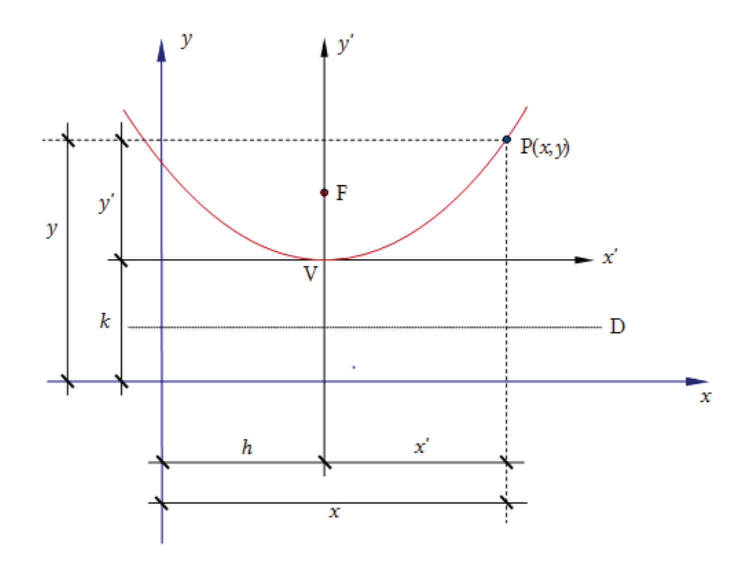


Figura 3.20.

De la comparación de la ecuación general de una cónica con las ecuaciones generales obtenidas para la parábola, podemos sintetizar lo siguiente:

Siendo $B=0$, es decir, para una cónica cuyos ejes no están rotados respecto de los ejes coordenados, la *condición necesaria* para que la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, represente una parábola, es que uno de los coeficientes de las variables cuadráticas sea nulo y el otro no. La *condición suficiente* es que el coeficiente de la variable lineal que corresponde al coeficiente de la variable cuadrática nula sea distinto de cero.

3.4.3 Tipos de problemas

Como ya hemos visto, tenemos dos tipos de problemas a resolver en el estudio de las secciones cónicas:

a) Dados los elementos de la cónica, determinar su ecuación.

b) Dada la ecuación de segundo grado en dos variables identificar de qué cónica se trata y encontrar sus elementos.

✘ Ejercicio 3.9.

A partir de los siguientes datos, escriba la ecuación de la parábola y represente gráficamente:

a) V(0,0) F(4,0)
b) V(2,3) F(2,5)

✘ Respuesta Ejercicio 3.9.

a) $y^2=16x$
b) $(x-2)^2=8(y-3)$

✘ Ejercicio 3.10.

Dada la ecuación cuadrática $x^2-4y-8x=0$, identifique la cónica, sus elementos y grafique.

✘ Respuesta Ejercicio 3.10.

Dada la ecuación cuadrática, agrupamos los términos en x y en y:

$(x^2-8x)-4y=0$

A continuación completamos cuadrados de la siguiente manera:

$(x^2-8x+16-16)-4y=0$

$(x-4)^2-4y-16=0$

$(x-4)^2-4(y+4)=0$

$\boxed{(x-4)^2=4(y+4)}$ Ecuación cartesiana de la parábola con V(4,-4) y eje focal paralelo al eje y

$2p=4 \rightarrow p=2$ $\begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y+4 \end{cases}$

$\boxed{x'^2=4y'}$

$F(0,p/2)_{x'y'} \rightarrow F(0,1)_{x'y'} \rightarrow \boxed{F(4,-3)}$

Ecuación de la directriz:

$y'=-p/2 \rightarrow y'=-1 \rightarrow \boxed{y+4=-1}$

$y=-5$

$|LR| = 2p \rightarrow \boxed{|LR| = 4}$

Los puntos extremos del lado recto son: A(2,-3) ; A'(6,-3)

En la Figura 3.21 se puede ver la representación gráfica del problema.

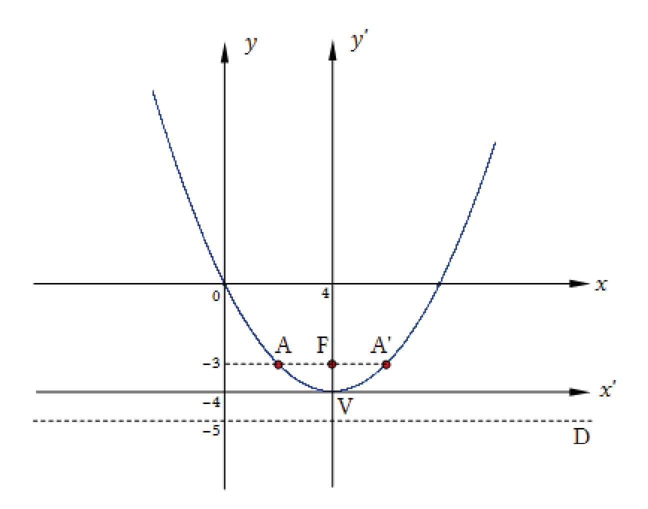


Figura 3.21.

3.4.4 Posiciones relativas entre recta y parábola

Para estudiar si la recta es ***secante***, ***tangente*** o ***exterior*** a la parábola, procedemos de la misma manera que lo hicimos al estudiar la posición relativa entre recta y circunferencia. Es decir, buscamos el o los puntos de intersección (si es que existen), entre ambos lugares geométricos.

✘ Ejercicio 3.11.

Dada la parábola de ecuación $x^2-4y-8x=0$ y las siguientes rectas, determine para cada una de ellas su posición relativa con respecto a la cónica dada. Represente gráficamente.

a) L_1: $y=-x-1$

b) L_2: $y=-x-4$

c) L_3: $y=-x+1$

✘ Respuesta Ejercicio 3.11.

a) Para buscar la intersección entre la parábola dada y la recta L_1, planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2-4y-8x=0 \\ y=-x-1 \end{cases}$$

Para resolver el sistema sustituimos $y=-x-1$ en la primera ecuación:

$$\begin{cases} x^2-4(-x-1)-8x=0 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases}$$

La solución de esta ecuación de segundo grado es $x=2$ que nos permite evaluar $y=-2-1=-3$. Es decir, existe un único punto de intersección entre la parábola y la recta L_1, cuyas coordenadas son: (2,-3). Por lo tanto la recta L_1 dada es *tangente* a la parábola.

b) Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x^2-4y-8x=0 \\ y=-x-4 \end{cases}$$

Para resolverlo, sustituimos $y=-x-4$ en la primera ecuación y obtenemos:

$x^2-4(-x-4)-8x=0$

$x^2-4x+16=0$

Esta ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales, por lo que no existen puntos de intersección entre la parábola dada y la recta L_2. Es decir, la recta L_2 es *exterior* a la parábola.

c) Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x^2-4y-8x=0 \\ y=-x+1 \end{cases}$$

y resolvemos:

$x^2-4(-x+1)-8x=0$

$x^2-4x-4=0$

cuyas soluciones aproximadas son:

$x_1=4,83$ $\quad\quad$ $x_2=-0,83$

A continuación sustituimos los valores obtenidos en la ecuación de la recta L_3 para determinar las ordenadas de los puntos de intersección:

$y_1=-3,83$ $\quad\quad$ $y_2=1,83$

Es decir, la recta es *secante* a la parábola ya que la corta en los dos puntos encontrados:

$P_1(4.83, -3.83)$ $\quad\quad$ $P_2(-0.83, 1.83)$

En la Figura 3.22, es posible observar la representación gráfica del ejercicio realizado:

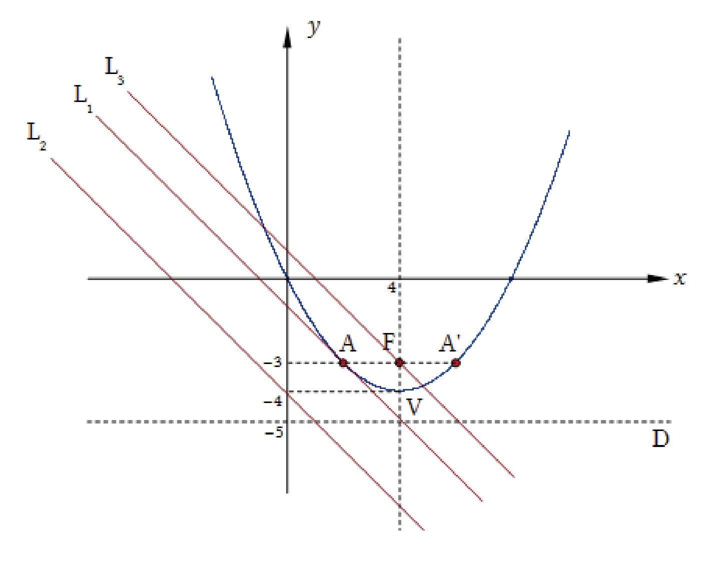


Figura 3.22.

3.4.5 Ecuación de una recta tangente a una parábola

Dada la parábola de vértice V(h,k) y eje paralelo al eje x, escribimos su ecuación cartesiana:

$(y-k)^2=2p(x-h)$

o bien la ecuación general que se obtiene desarrollando la ecuación anterior:

$y^2-2px-2ky+k^2+2ph=0$

Para obtener la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera T(x_T, y_T) de la parábola (ver Figura 3.23), derivamos implícitamente la última ecuación obtenida:

$2yy'-2p-2ky'=0$

Agrupamos los términos que dependen de y' y despejamos, obteniendo de este modo la siguiente relación:

$$y' = \frac{p}{y-k}$$

Esta expresión nos permite evaluar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la parábola, siendo y-k no nulo. En particular nos interesa evaluar la derivada primera en el punto T(x_T, y_T), es decir:

$$y'_T = \frac{p}{y_T - k}$$

donde y_T-k es no nulo.

A continuación escribimos la ecuación de la recta que tiene por pendiente a y'_T y que pasa por el punto $T(x_T, y_T)$, es decir la recta tangente a la parábola en el punto de tangencia $T(x_T, y_T)$, como puede observarse en la Figura 3.23.

$$L_T: \quad y - y_T = \frac{p}{(y_T - k)}(x - x_T)$$

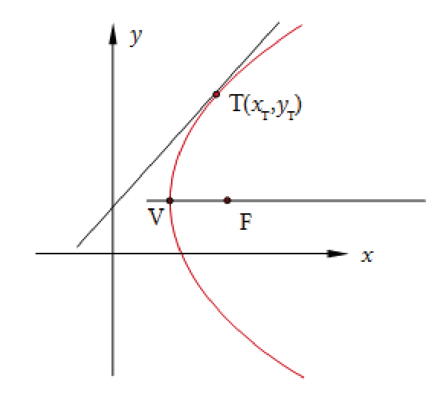


Figura 3.23.

✘ Ejercicio 3.12.

Encuentre una ecuación para la recta tangente a la parábola de vértice $V(h,k)$ y eje focal paralelo al eje y.

✘ Respuesta Ejercicio 3.12.

$$L_T: \quad y - y_T = \frac{(x_T - h)}{p}(x - x_T)$$

✘ Ejercicio 3.13.

Determine la ecuación de la recta tangente a la parábola x^2-4y-8x=0 en el punto T(2,-3). Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 3.13.

L_T: $y+x+1=0$

3.4.6 Ecuaciones paramétricas de una parábola

A los efectos de escribir ecuaciones paramétricas de una parábola, buscamos ecuaciones:

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) & t \in R \end{cases}$$

de forma tal que para cada valor del parámetro t, se obtenga un par ordenado (x,y) que verifique la ecuación de la parábola dada.

Una manera sencilla de definir ecuaciones paramétricas para una parábola dada, es adoptar como parámetro la variable que se encuentra elevada al cuadrado. De este modo, si la ecuación es $y^2=2px$, resultan las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} y=t & t \in R \\ x = \dfrac{t^2}{2p} & \end{cases}$$

De la misma manera, si la ecuación es $x^2=2py$, escribimos las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=t & t \in R \\ y = \dfrac{t^2}{2p} & \end{cases}$$

✘ Ejercicio 3.14.

Escriba ecuaciones paramétricas para la parábola de ecuación: $(y\text{-}1)^2=8(x\text{-}2)$

✘ Respuesta Ejercicio 3.14.

Despejamos la variable que no se encuentra elevada al cuadrado:

$$x = \frac{1}{8}(y-1)^2 + 2$$

y luego escribimos:

$$\begin{cases} y = t \\ x = \dfrac{1}{8}(t-1)^2 + 2 \quad ; \qquad t \in R \end{cases}$$

3.4.7 Familias de parábolas

Una familia de parábolas es un conjunto de parábolas que satisfacen una determinada condición.

✘ Ejercicio 3.15.

Encontraremos la familia de parábolas de eje coincidente con el eje x y parámetro geométrico p=2

✘ Respuesta Ejercicio 3.15.

La ecuación de una parábola de esta familia es de la forma: $(y\text{-}k)^2=2p(x\text{-}h)$.

Si el eje de cualquier parábola de la familia es el eje x, entonces k=0, con lo cual la ecuación resulta:

$$\boxed{y^2=4(x\text{-}h)} \qquad h \in R$$

h es el parámetro de la familia de parábolas que cumplen las condiciones dadas. En la Figura 3.24 se ilustran algunas parábolas que pertenecen a esta familia.

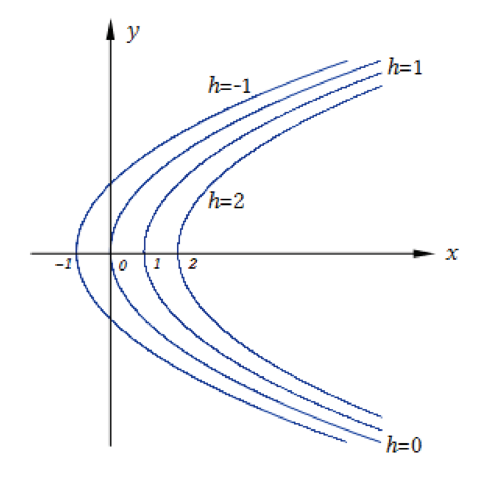


Figura 3.24.

✘ Ejercicio 3.16.

Determinaremos la familia de parábolas de eje coincidente con el eje y y parámetro geométrico p=4

✘ Respuesta Ejercicio 3.16.

La ecuación de una parábola de esta familia es de la forma: $(x-h)^2=2p(y-k)$.

Si el eje de cualquier parábola de la familia es el eje y, entonces h=0 con lo cual la ecuación resulta:

$x^2=8(y-k)$ $\quad k \in R$

k es el parámetro de la familia de parábolas que cumplen las condiciones dadas. En la Figura 3.25 se ilustran algunas parábolas que pertenecen a esta familia.

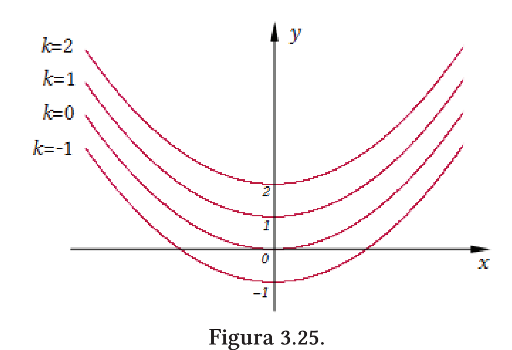


Figura 3.25.

✘ Ejercicio 3.17.

Determinaremos la familia de parábolas de eje focal coincidente con el eje x y cuyo vértice es el punto V(2,0).

✘ Respuesta Ejercicio 3.17.

La ecuación de una parábola de esta familia es de la forma: $(y-k)^2=2p(x-h)$.

El vértice de cualquier parábola de esta familia se encuentra en el punto dato V, entonces h=2 y k=0 con lo cual la ecuación resulta:

$y^2=2p(x-2)$ $\quad p \in R$

El *parámetro geométrico p,* es el parámetro de la familia de parábolas que cumplen las condiciones dadas. En la Figura 3.26 se ilustran algunas parábolas que pertenecen a esta familia.

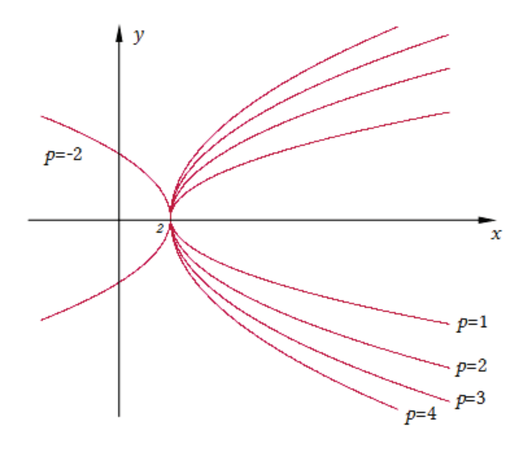


Figura 3.26.

3.5 ELIPSE

3.5.1 Definición de elipse

> **Definición:** La ***elipse*** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados ***focos***, es una constante igual a $2a$ y esa constante es mayor que la distancia entre los focos llamada $2c$.

En la Figura 3.27 se indican los focos de la elipse con F_1 y F_2. Si los extremos de una cuerda se fijan a dichos puntos, a medida que se mueve el lápiz en el punto P, con la cuerda tensa, la curva que se grafica es una elipse.

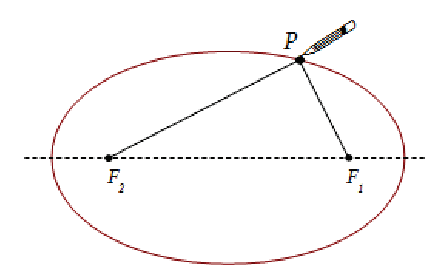


Figura 3.27.

3.5.2 Ecuaciones cartesiana y general de la elipse

. EL CENTRO DE LA ELIPSE COINCIDE CON EL ORIGEN DE COORDENADAS

A los efectos de encontrar la ecuación de la elipse, ubicamos el origen de coordenadas en el punto medio entre los dos focos y el eje x sobre la recta que pasa por los focos, (Figura 3.28). Representando con $2c$ la distancia entre los focos, las coordenadas de los mismos son $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$.

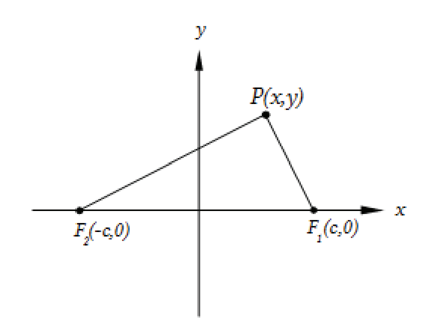


Figura 3.28.

De acuerdo a la definición de elipse, la suma de las distancias de cualquier punto P(x,y) de la misma a los dos focos, es una constante igual a $2a$. Entonces planteamos (ver Figura 3.28):

$$\|\boldsymbol{F_1P}\| + \|\boldsymbol{F_2P}\| = 2a$$

donde $\boldsymbol{F_1P}=(x-c\,,y)$ y $\boldsymbol{F_2P}=(x+c\,,y)$

Sustituimos en la ecuación anterior y resulta:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+c^2+2cx$$

$$-4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

Elevando al cuadrado nuevamente en ambos miembros:

$$a^2[(x+c)^2+y^2]=a^4+c^2x^2+2a^2cx$$

$$a^2x^2+a^2c^2+2a^2cx+a^2y^2=a^4+c^2x^2+2a^2cx$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Observamos en la Figura 3.28 el triángulo F_1PF_2: la longitud de un lado es $2c$, en tanto que la suma de las longitudes de los otros dos lados es $2a$. Por ello resulta $2a > 2c$ con lo que $a^2-c^2 > 0$. Entonces se designa, $b^2=a^2-c^2$ por lo que la última expresión puede escribirse como:

$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$

Dividimos ahora miembro a miembro por a^2b^2 y resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Esta última ecuación es la llamada ecuación *cartesiana*, ecuación *canónica*, ecuación *normal* u *ordinaria* de la elipse.

De la ecuación obtenida, se observa que la gráfica es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados. Cuando se reemplaza en la ecuación x por $-x$, ésta no se altera, con lo que la gráfica es simétrica con respecto al eje y y de igual modo, cuando se reemplaza en la ecuación y por $-y$, ésta no se altera, con lo que la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

Si en la ecuación planteamos $y=0$, se obtiene $x=\pm a$, en tanto que, cuando reemplazamos $x=0$ en la ecuación, obtenemos $y=\pm b$. Por lo tanto la elipse intersecta al eje x en los puntos $(a,0)$ y $(-a,0)$ y al eje y en los puntos $(0,b)$ y $(0,-b)$. El segmento $2a$ se designa ***eje mayor*** de la elipse y sus extremos se denominan ***vértices***. El segmento $2b$ se llama ***eje menor*** de la elipse ($b<a$ porque $b^2=a^2-c^2$). La intersección de ambos ejes de la elipse es el ***centro*** de la misma.

. LADO RECTO

La *cuerda focal* perpendicular al eje focal es el lado recto. Si en la ecuación de la elipse sustituimos $x=c$, encontraremos los puntos A y A′ extremos del lado recto correspondientes al foco F_1 (Figura 3.29):

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1 \quad\rightarrow\quad y_A^2=\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)b^2$$

$$y_A^2=\frac{(a^2-c^2)}{a^2}b^2 \quad\rightarrow\quad y_A^2=\frac{b^4}{a^2} \quad\rightarrow\quad y=\pm\frac{b^2}{a}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos A y A′ son:

$$A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)\ ;\quad A'\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$$

Si en la ecuación de la elipse sustituimos $x=-c$, obtenemos los puntos B y B′, extremos del lado recto correspondientes al foco F_2:

$$B\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)\ ;\quad B'\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$$

Estos resultados muestran que la longitud del lado recto es:

$$|LR| = 2\frac{b^2}{a}$$

Observamos además que los focos se encuentran sobre el eje mayor de la elipse. Ubicando todos los puntos importantes señalados, graficamos la elipse (ver Figura 3.29).

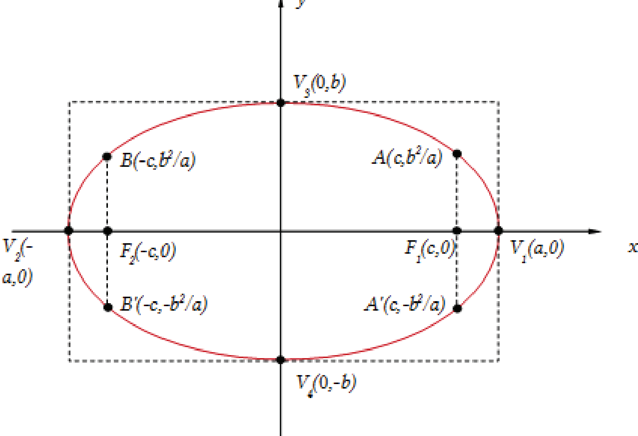


Figura 3.29.

. EXTENSIÓN DE LA ELIPSE

A partir de la definición de elipse, ya sabemos que sus puntos no se alejan indefinidamente de sus focos. Podemos estudiar la extensión de la elipse despejando la variable *x* y luego la variable *y* de su ecuación:

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad\qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Para que la variable *x* tome valores reales, debe cumplirse que b^2-$y^2 \geq 0$, es decir, $-b \leq y \leq b$. De igual modo, para que la variable *y* tome valores reales, a^2-$x^2 \geq 0$, por lo tanto, $-a \leq x \leq a$.

Esto nos muestra que ningún punto de la elipse está fuera del rectángulo formado por las rectas $x=a$; $x=-a$; $y=b$ e $y=-b$.

Los conceptos de extensión y simetría son de gran ayuda para dibujar la gráfica de cualquier curva.

. SI EL EJE MAYOR DE LA ELIPSE ESTÁ SOBRE EL EJE Y

Si los focos de la elipse están sobre el eje *y* en los puntos $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$, siguiendo un procedimiento similar al ya descripto, es posible obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

En la Figura 3.30 se ilustra una elipse con eje focal sobre el eje y.

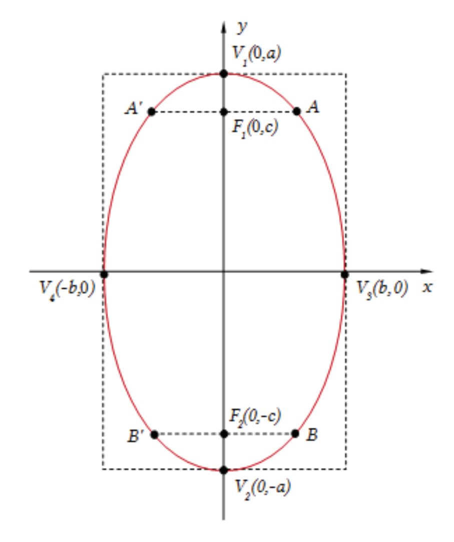


Figura 3.30.

En ambos casos estudiados, la ecuación general de la elipse toma respectivamente las siguientes formas:

$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$,   cuando el eje focal es el eje x.

$a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0$,   cuando el eje focal es el eje y.

. PROPIEDAD FOCO-DIRECTRIZ DE UNA ELIPSE. EXCENTRICIDAD

Si bien la parábola se definió en términos de un foco y una directriz, no se utilizó una directriz en la definición dada de elipse. Veremos a continuación que para la elipse existe una directriz asociada para cada foco. Cuando hicimos la deducción de la ecuación de la elipse con centro en (0,0) y eje mayor, o eje focal, sobre el eje x, llegamos a la siguiente expresión intermedia:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

Si en la misma, dividimos ambos miembros por a y sacamos factor común c en el segundo miembro, obtenemos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}+x\right)$$

El primer miembro de esta igualdad es la distancia de un punto P(x,y) cualquiera de la elipse al foco (-c,0). En el segundo miembro, el factor $\left(\frac{a^2}{c}+x\right)$, es la distancia del punto P(x,y) de la elipse a la recta x=-a^2/c (ver Figura 3.31), en tanto que el factor c/a es una constante que toma valores entre cero y uno, denominada ***excentricidad***, entonces podemos definir también a la elipse de la siguiente manera:

Definición: ***Elipse*** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que, la distancia a un punto fijo llamado ***foco*** es igual a una constante (entre cero y uno) por su distancia a una recta fija llamada ***directriz***.

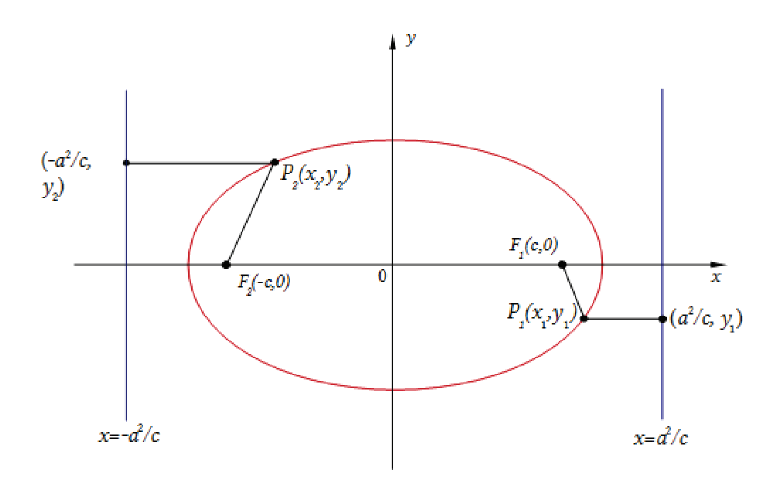


Figura 3.31.

. ANÁLISIS DE LA EXCENTRICIDAD

Al cociente c/a, se lo denomina ***excentricidad*** e de la elipse. Para analizar cómo cambia el aspecto de una elipse cuando se modifica la excentricidad, dejaremos fijo el eje mayor:

- Si la excentricidad es nula, e=0, las ecuaciones e=c/a y $b^2=a^2-c^2$ conducen a c=0 y $a=b$. Es decir, los dos focos coinciden en el centro (por ser c=0) y la elipse es una *circunferencia* ($a=b$).
- Si la excentricidad e crece, los focos se separan ($c\neq 0$), alejándose del centro y el semieje menor b disminuye. A medida que e se acerca a 1, c se acerca al valor de a y b se acerca a 0.
- Si e=1, $c=a$ ($e=c/a$), con lo que b=0 ($b^2=a^2-c^2$). La definición de elipse implica que la gráfica es el segmento de recta que une ambos focos.

En la Figura 3.32 se ilustra lo descripto:

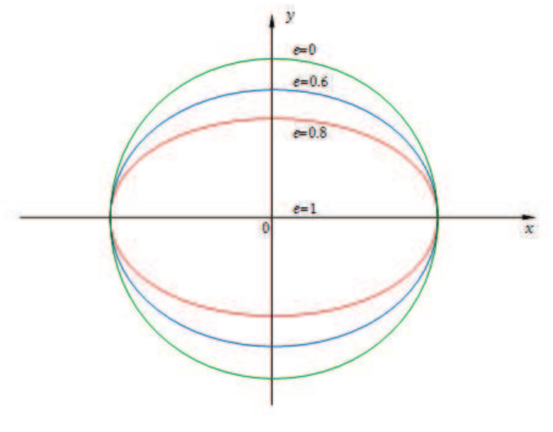


Figura 3.32.

. EL CENTRO DE LA ELIPSE NO COINCIDE CON EL ORIGEN DE COORDENADAS

Si el centro de la elipse se encuentra en el punto (h,k), introducimos un nuevo par de ejes coordenados $x'y'$ con origen en (h,k) (ver Figura 3.33). La ecuación de la elipse referida a los nuevos ejes es:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Teniendo presentes las ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} x'=x-h \\ y'=y-k \end{cases}$$

la ecuación anterior resulta:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

que es la ecuación cartesiana de la elipse con centro C(h,k) y eje mayor (o eje focal) paralelo al eje x.

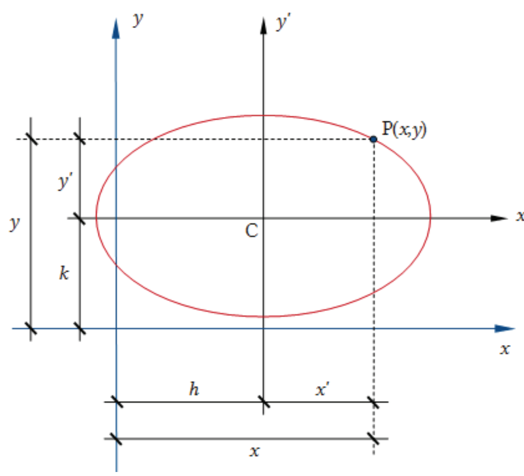


Figura 3.33.

Para obtener la ecuación general, desarrollamos la ecuación anterior y dejamos todos los términos en el primer miembro:

$$b^2x^2+a^2y^2-2hb^2x-2ka^2y+(b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2)=0$$

Comparamos con la ecuación general para una cónica $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ y vemos que:

$B=0$, A y C son no nulos ambos, de igual signo y de distinto valor.

Procediendo de la misma manera, cuando el eje mayor (o eje focal) es paralelo al eje y, se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

De igual modo que en el caso anterior, para obtener la ecuación general, desarrollamos la ecuación anterior y dejamos todos los términos en el primer miembro:

$$a^2x^2+b^2y^2-2ha^2x-2kb^2y+(a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2)=0$$

3.5.3 Tipos de problemas

Como ya hemos visto, tenemos dos tipos de problemas a resolver:

a) Dados ciertos elementos de la elipse, determinar su ecuación y los restantes elementos.

b) Dada la ecuación cuadrática en dos variables, identificar de qué cónica se trata y encontrar sus elementos.

✘ Ejercicio 3.18.

A partir de los siguientes datos, escriba la ecuación de la elipse, identifique todos sus elementos y grafique.

a) $F_1(0,4)$; $F_2(0,-4)$; $V_1(0,5)$

b) $F_1(7,2)$; $F_2(-1,2)$; $V_1(8,2)$

✘ Respuesta Ejercicio 3.18.

a) El punto medio entre los focos es el origen de coordenadas. Es decir, el centro de la elipse dada coincide con (0,0). A partir de los datos de los focos, encontramos c=4 y del dato del vértice, hallamos a=5. Luego usando la relación $b^2=a^2-c^2$ surge b=3. Siendo el eje focal el eje y, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

En la Figura 3.34, se muestra la elipse y todos sus elementos.

$|LR|=2b^2/a=18/5$

$e=c/a=4/5$

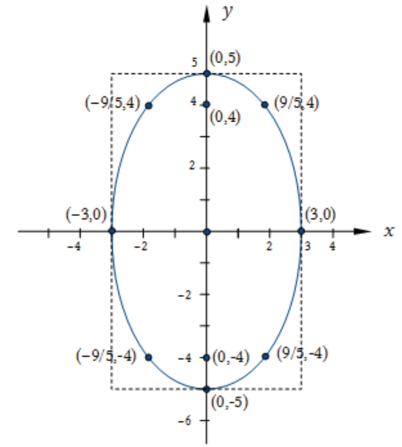


Figura 3.34.

b) El centro de la elipse es el punto medio entre ambos focos, es decir, C(3,2). La distancia entre los focos es 8, de donde c=4. La distancia del centro C(3,2) al vértice $V_1(8,2)$ es 5, de donde a=5. Por lo tanto, a partir de la relación $b^2=a^2-c^2$, surge que b=3. El eje mayor de la elipse (o eje focal) es paralelo al eje x. La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

En la Figura 3.35, se muestra la elipse y todos sus elementos.

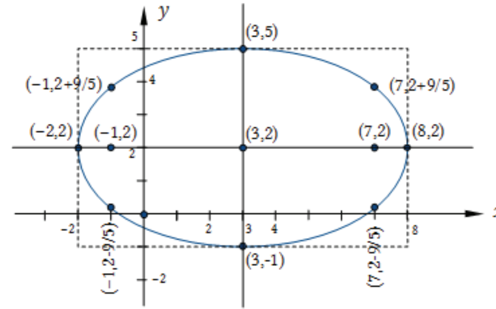


Figura 3.35.

✘ Ejercicio 3.19.

Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas, identifique en cada caso, la cónica, sus elementos y represente gráficamente:

a) $2x^2+y^2-12x-4y+18=0$

b) $2x^2+y^2-12x-4y+22=0$

c) $2x^2+y^2-12x-4y+30=0$

✘ Respuesta Ejercicio 3.19.

a) Para la ecuación cuadrática dada, agrupamos términos en las variables x e y y completamos cuadrados:

$(2x^2-12x)+(y^2-4y)+18=0$

$2(x^2-6x)+(y^2-4y)+18=0$

$2(x^2-6x+9-9)+(y^2-4y+4-4)+18=0$

$2(x-3)^2+(y-2)^2-18-4+18=0$

$$\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

$C(3,2);\ \ a=2;\ b=\sqrt{2}\ ;\ c=\sqrt{2}\ ;\ \ e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$|LR|=2$

$F_1\left(3,2+\sqrt{2}\right);\ \ F_2\left(3,2-\sqrt{2}\right)$

$V_1\left(3+\sqrt{2},2\right);\ \ V_2\left(3-\sqrt{2},2\right)$

$V_3(3,4);\ \ V_4(3,0)$

$A\left(4,2+\sqrt{2}\right);\ \ A'\left(2,2+\sqrt{2}\right)$

$B\left(4,2-\sqrt{2}\right);\ \ B'\left(2,2-\sqrt{2}\right)$

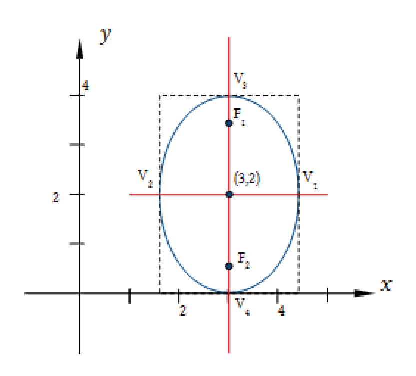


Figura 3.36.

b) $2x^2+y^2-12x-4y+22=0$

$(2x^2-12x)+(y^2-4y)+22=0$

$2(x^2-6x+9-9)+(y^2-4y+4-4)+22=0$

$2(x-3)^2+(y-2)^2-18-4+22=0$

$$2(x-3)^2+(y-2)^2=0$$

Como la suma de dos términos positivos da cero, la única posibilidad es que cada uno de esos términos sea nulo. Es decir, el único punto del plano xy que satisface esta ecuación es C(3,2).

c) $2x^2+y^2-12x-4y+30=0$

En este caso, luego de completar cuadrados queda:

$2(x-3)^2+(y-2)^2=-8$

Por lo tanto, no existen puntos del plano xy que satisfagan esta ecuación.

Observación:

En el ejercicio 3.19 se ilustran tres casos posibles, que generalizamos de la siguiente manera:

Dada la ecuación cuadrática $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ para la cual se cumple la condición necesaria para que represente una elipse, es decir, A y C de igual signo y distinto valor, luego de completar cuadrados queda de la forma:

$A(x-h)^2+C(y-k)^2=M$

Se trata de una elipse si A, C y M son de igual signo. Si $M=0$, se trata del punto (h,k) y si M es de signo contrario a A y C, no existe lugar geométrico que satisfaga la ecuación dada.

3.5.4 Posiciones relativas entre recta y elipse

Para estudiar si la recta es *secante*, *tangente* o *exterior* a la elipse, buscamos el o los puntos de intersección (si es que existen) entre ambos lugares geométricos, tal como hicimos al plantear las posiciones relativas entre recta y circunferencia o entre recta y parábola.

✘ Ejercicio 3.20.

Dada la elipse de ecuación $25x^2+9y^2-225=0$ y las siguientes rectas, determine para cada una de ellas su posición relativa con respecto a la cónica dada. Represente gráficamente.

a) L_1: $5x+4y=0$

b) L_2: $5x+4y-25=0$

c) L_3: $5x+4y-32=0$

✘ Respuesta Ejercicio 3.20.

a) L_1 es *secante* a la elipse.

b) L_2 es *tangente* a la elipse.

c) L_3 es *exterior* a la elipse.

3.5.5 Ecuación de una recta tangente a una elipse

Escribimos nuevamente la ecuación general de una elipse con centro $C(h,k)$ y eje mayor o (o eje focal) paralelo al eje x:

$b^2x^2+a^2y^2-2hb^2x-2ka^2y+(b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2)=0$

Para obtener la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera T(x_T, y_T) de la elipse (ver Figura 3.37), derivamos implícitamente la última ecuación:

$2b^2x+2a^2yy'-2hb^2-2ka^2y'=0$

Agrupamos los términos que dependen de y' y despejamos obteniendo de este modo la siguiente relación:

$$y' = \frac{-b^2(x-h)}{a^2(y-k)}$$

Con esta expresión podemos evaluar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la elipse tal que y-k es no nulo. En particular nos interesa evaluar en el punto T(x_T, y_T), es decir:

$$y'_T = \frac{-b^2(x_T-h)}{a^2(y_T-k)}$$

con $y_T-k\neq 0$

A continuación escribimos la ecuación de la recta tangente a la elipse, que tiene pendiente y'_T y pasa por el punto T(x_T, y_T):

$$L_T: \quad y - y_T = \frac{-b^2(x_T-h)}{a^2(y_T-k)}(x-x_T)$$

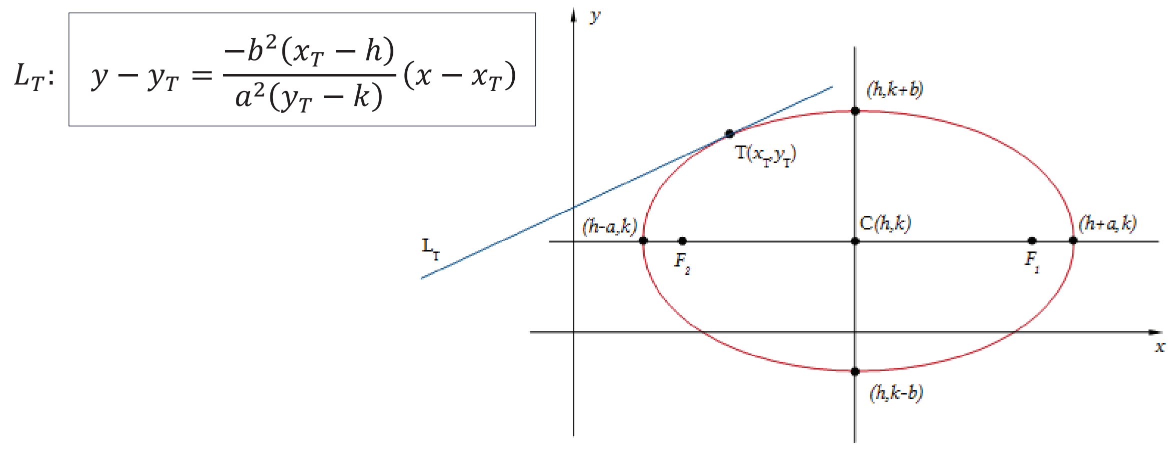


Figura 3.37.

✘ Ejercicio 3.21.

Determine una ecuación para la recta tangente a la elipse de centro C(h,k) y eje mayor paralelo al eje y.

✘ Ejercicio 3.22.

Determine la ecuación general de la recta tangente a la elipse $25x^2+9y^2-225=0$, en el punto T(9/5,4). Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 3.22.

L_T: $5x+4y-25=0$

3.5.6 Ecuaciones paramétricas de una elipse

Una representación *paramétrica* de la elipse está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\text{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

donde $a>b$. Efectivamente, para el rango especificado del parámetro θ, estas ecuaciones describen una elipse completa, como verificaremos a continuación. Buscamos eliminar el parámetro θ, para lo cual elevamos al cuadrado ambos miembros de cada ecuación y luego sumamos miembro a miembro:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cos^2\theta + sen^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas dadas representan una elipse de semiejes a y b. A partir de la Figura 3.38 interpretaremos geométricamente el parámetro θ. En dicha figura hay dos circunferencias. El radio de la circunferencia menor es b y el radio de la circunferencia mayor es a. Para un cierto ángulo θ, ubicamos los puntos A y B de intersección de la semirrecta con las dos circunferencias respectivamente. La recta horizontal que pasa por el punto A y la recta vertical que pasa por el punto B se intersectan en un punto P(x,y). Para dicho punto se cumple que:

$$x = \|\boldsymbol{OB}\| cos\theta = a\ cos\theta$$
$$y = \|\boldsymbol{OA}\| sen\theta = b\ sen\theta$$

Por lo tanto P(x,y) es un punto de la elipse. A medida que θ varía entre 0 y 2π, el punto P va describiendo los puntos de la elipse en sentido contrario al de las agujas del reloj.

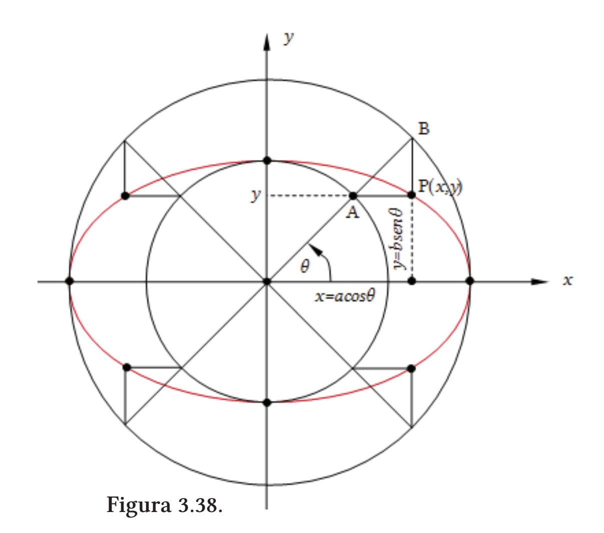


Figura 3.38.

3.5.7 Familias de elipses

Una familia de elipses es un conjunto de elipses que satisfacen una determinada condición.

✘ Ejercicio 3.23.

Encontraremos la familia de elipses cuyos focos son: F_1(-1,2), F_2(7,2)

✘ Respuesta Ejercicio 3.23.

El centro de la elipse es el punto medio entre ambos focos, es decir C(3,2). La distancia entre los focos es 8, de donde c=4. A partir de la relación $b^2=a^2-c^2$, escribimos $b^2=a^2-16$, que debe ser mayor que 0. Siendo el eje mayor paralelo al eje x, escribimos la ecuación de cualquier elipse de esta familia:

$$\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{a^2-16}=1$$

Para que una elipse pertenezca a esta familia, observamos que debe ser a>4. En la Figura 3.39 se ilustran algunas elipses de esta familia.

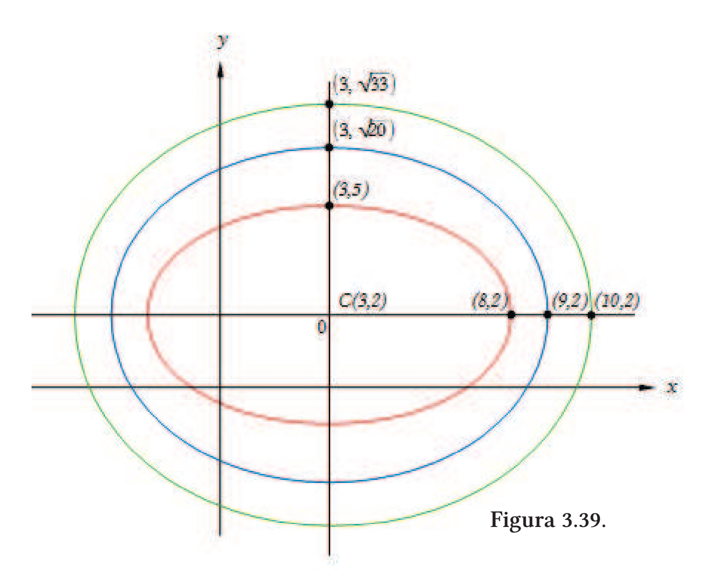


Figura 3.39.

3.6 HIPÉRBOLA

3.6.1 Definición de hipérbola

> **Definición:** La ***hipérbola*** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados ***focos***, es una constante igual a 2a y esa constante es menor que la distancia entre los focos llamada 2c.

3.6.2 Ecuaciones cartesiana y general de la hipérbola

. EL CENTRO DE LA HIPÉRBOLA COINCIDE CON EL ORIGEN DE COORDENADAS

A los efectos de encontrar la ecuación de la hipérbola, ubicamos el origen de coordenadas en el punto medio entre los dos focos y el eje x sobre la recta que pasa

por los focos, (ver Figura 3.40). Representando con $2c$ la distancia entre los focos las coordenadas de los mismos son $F_1(c,0)$y $F_2(-c,0)$.

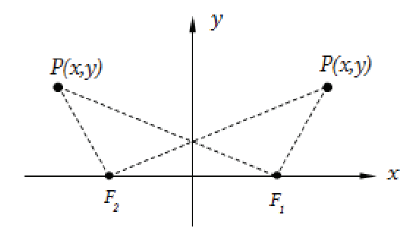


Figura 3.40.

A partir de la definición planteamos:

$$\|\boldsymbol{F_2P}\| - \|\boldsymbol{F_1P}\| = 2a$$

o bien:

$$\|\boldsymbol{F_2P}\| - \|\boldsymbol{F_1P}\| = -2a$$

dependiendo si el punto P(x,y) se encuentra ubicado a la derecha o a la izquierda del eje y. Combinamos las dos ecuaciones escribiendo de la siguiente manera:

$$\|\boldsymbol{F_2P}\| - \|\boldsymbol{F_1P}\| = \pm 2a$$

Siendo:

$\boldsymbol{F_1P}=(x-c,y)$ y $\boldsymbol{F_2P}=(x+c,y)$

Entonces, la ecuación anterior resulta:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos:

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

A continuación, elevando al cuadrado nuevamente ambos miembros y simplificando términos, resulta:

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

Observamos en la Figura 3.40 el triángulo F_2PF_1: la longitud de un lado es $2c$, en tanto que la diferencia de las longitudes de los otros dos lados es $2a$. Por ello resulta c > a con lo que $c^2-a^2>0$. Designando $b^2=c^2-a^2$, la última expresión obtenida puede escribirse como:

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

Dividiendo ahora miembro a miembro por a^2b^2, llegamos a la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

. SIMETRÍA Y EXTENSIÓN

De la ecuación obtenida, se observa que la gráfica es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados. Despejando de la ecuación las variables x e y, una por vez, podemos estudiar los valores permitidos de la misma, es decir la extensión de la gráfica:

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

De la primera ecuación surge que no existen restricciones para los valores de la variable y. Es decir, y puede tomar cualquier valor real. En cambio, de la segunda ecuación surge que x^2-a^2 debe ser ≥0, o sea que x^2 debe ser mayor que a^2. Por lo tanto, la hipérbola se extiende y aleja indefinidamente de los ejes coordenados en cada cuadrante, sin haber puntos de la misma entre las rectas $x=a$ y $x=-a$.

Es así que la hipérbola consta de dos ramas. Los puntos (a,0) y (-a,0) se denominan *vértices* de la hipérbola y el segmento entre ambos se designa como *eje transversal* (ver Figura 3.41). El *eje conjugado*, es el segmento entre los puntos (0,b) y (0,-b). El punto de intersección de ambos ejes es el *centro* de la hipérbola.

. LADO RECTO

La *cuerda focal* perpendicular al eje focal se denomina lado recto. Si en la ecuación de la hipérbola sustituimos $x=c$, y consideramos la relación $c^2=a^2+b^2$, encontramos los puntos extremos del lado recto correspondientes al foco F_1. Es decir:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y_A^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y_A^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)b^2$$

$$y_A^2 = \frac{(c^2 - a^2)}{a^2}b^2 \quad \rightarrow \quad y_A^2 = \frac{b^4}{a^2} \quad \rightarrow \quad y_A = \pm\frac{b^2}{a}$$

Por lo tanto resultan:

$$\mathrm{A}\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \; ; \quad \mathrm{A}'\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

Así mismo, si en la ecuación de la elipse hacemos $x=-c$, obtenemos los puntos extremos del lado recto, correspondientes al foco F_2:

$$B\left(-c,\frac{b^2}{a}\right) \;;\quad B'\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$$

Por lo tanto, la longitud del lado recto es:

$$|LR| = 2\frac{b^2}{a}$$

Observamos que, a diferencia de la elipse para la cual $a > c$, $c^2=a^2-b^2$ y $a > b$, para la hipérbola $c > a$, $c^2=a^2+b^2$ y no hay restricción para los valores relativos de a y b.

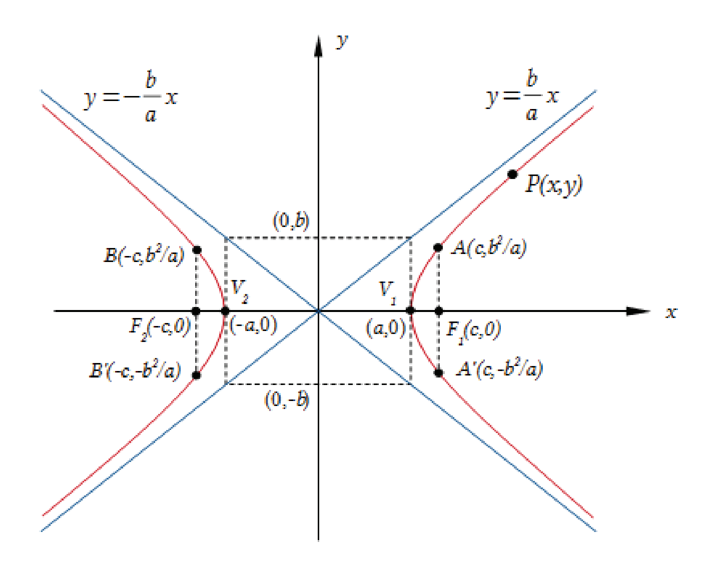


Figura 3.41.

. ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA

En la Figura 3.41 pueden observarse las diagonales extendidas del rectángulo de lados $2a$ y $2b$. Es posible demostrar que la distancia perpendicular de cada diagonal extendida a la curva, tiende a cero a medida que la curva se aleja indefinidamente del origen. Por lo tanto cada diagonal extendida es una asíntota de la hipérbola. Las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola con eje focal coincidente con el eje x son:

$$y = \frac{b}{a}x \;;\quad y = -\frac{b}{a}x$$

. SI LOS FOCOS DE LA HIPÉRBOLA ESTÁN SOBRE EL EJE Y

Si los focos de la hipérbola son $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$, siguiendo un procedimiento similar al ya descripto, es posible obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En la Figura 3.42 se ilustra una hipérbola con eje focal sobre el eje y. Las asíntotas en este caso son:

$$y = \frac{a}{b}x$$

$$y = -\frac{a}{b}x$$

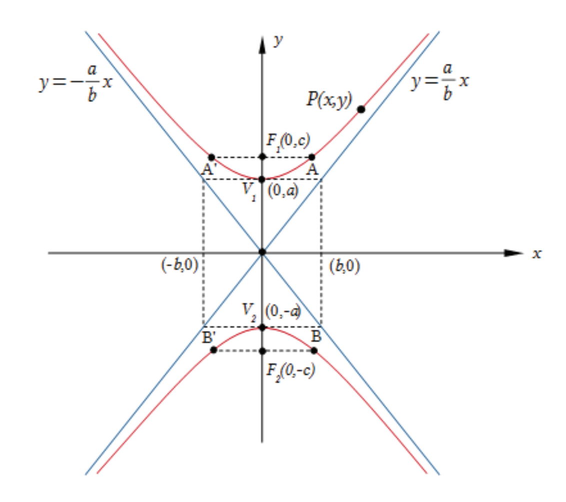


Figura 3.42.

En ambos casos estudiados, la ecuación general de la hipérbola toma respectivamente las siguientes formas:

b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0 cuando el eje focal es el eje x.

b^2y^2-a^2x^2-a^2b^2=0 cuando el eje focal es el eje y.

. PROPIEDAD FOCO-DIRECTRIZ DE UNA HIPÉRBOLA. EXCENTRICIDAD

De forma análoga a la que hemos trabajado para la elipse, es posible demostrar que para el caso de la hipérbola de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

al foco $F_1(c,0)$ le corresponde la directriz $x=a^2/c$ y al foco $F_2(-c,0)$ la directriz $x=-a^2/c$. El cociente c/a se denomina *excentricidad* e de la hipérbola. Siendo $c > a$, en este caso resulta $e > 1$.

Para estudiar cómo se modifica el aspecto de una hipérbola al variar la excentricidad, consideraremos las relaciones $e=c/a$ y $c^2=b^2+a^2$. Dejando ahora fijo el valor de a, si la excentricidad e aumenta, implica que c aumenta, con lo cual b también crece. Es decir, si e crece, dejando fijo el valor de a, las ramas de la hipérbola quedan encerradas por ángulos mayores. En otras palabras, las asíntotas se pegan al eje conjugado, (ver ejercicio 3.33 de familia de hipérbolas).

. HIPÉRBOLAS CONJUGADAS

Las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

corresponden a las ecuaciones de dos hipérbolas denominadas ***hipérbolas conjugadas***. Las asíntotas en ambos casos son las rectas $y = \frac{b}{a}x$ e $y - \frac{b}{a}x$ pero la primera es una hipérbola de eje focal coincidente con el eje x, en tanto la segunda es una hipérbola de eje focal coincidente con el eje y.

. HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Se denomina ***hipérbola equilátera*** a aquella para la cual $a=b$, es decir, sus semiejes son iguales. También se la denomina ***hipérbola rectangular*** porque sus asíntotas, $y=x$, e $y=-x$, son perpendiculares entre sí. Para las hipérbolas equiláteras la excentricidad resulta $e=\sqrt{2}$, es decir, es independiente del valor del semieje a.

. EL CENTRO DE LA HIPÉRBOLA NO COINCIDE CON EL ORIGEN DE COORDENADAS

Si el centro de la hipérbola se encuentra en el punto (h,k), introducimos un nuevo par de ejes coordenados $x'y'$, paralelos a los ejes coordenados xy, pero con origen en (h,k) (ver Figura 3.43). La ecuación de la hipérbola referida a los nuevos ejes es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Teniendo en cuenta las *ecuaciones de traslación*:

$$\begin{cases} x'=x-h \\ y'=y-k \end{cases}$$

la ecuación anterior resulta:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

que es la *ecuación cartesiana* de la hipérbola con centro C(h,k) y eje focal paralelo al eje x.

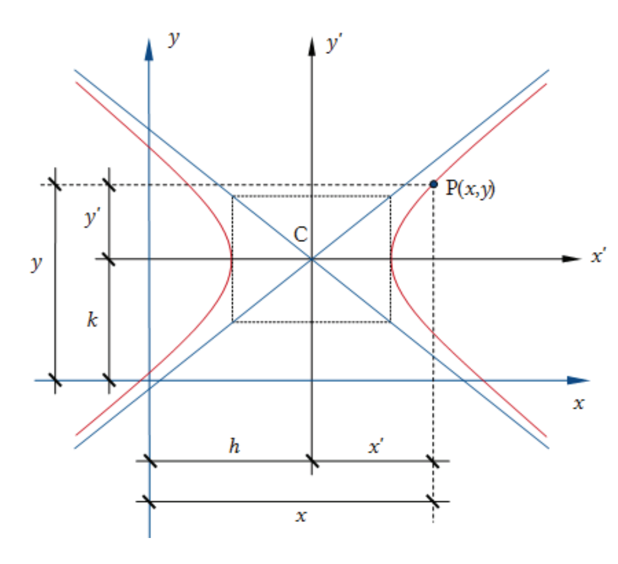


Figura 3.43.

Para obtener la *ecuación general*, desarrollamos la ecuación anterior y dejamos todos los términos en el primer miembro:

$$b^2x^2-a^2y^2-2hb^2x+2ka^2y+(b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2)=0$$

Comparamos con la ecuación general para una cónica $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ y vemos que B es nulo, en tanto que A y C son no nulos ambos y de distinto signo.

Procediendo de la misma manera, cuando el eje focal es paralelo al eje y, se obtiene:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

A partir de esta ecuación es posible obtener la siguiente *ecuación general*:

$$b^2y^2-a^2x^2-2kb^2y+2ha^2x+(b^2k^2-a^2h^2-a^2b^2)=0$$

3.6.3 Tipos de problemas

Al igual que para el resto de las secciones cónicas, tenemos dos tipos de problemas a resolver:

a) Dados ciertos elementos de la hipérbola, determinar su ecuación y los restantes elementos.

b) Dada la ecuación cuadrática en dos variables, identificar de qué cónica se trata y encontrar sus elementos.

✘ Ejercicio 3.24.

A partir de los siguientes datos, escriba la ecuación de la hipérbola, identifique todos sus elementos y grafique: $F_1(5,0)$; $F_2(-5,0)$; la diferencia de distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es 6.

✘ Respuesta Ejercicio 3.24.

Siendo $2a=6$, resulta $a=3$. El punto medio entre los focos es el centro de la hipérbola. Es decir, el centro de la hipérbola coincide con (0,0). Además, los focos están sobre el eje x, por lo tanto la ecuación de la hipérbola dada tiene la forma:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

La distancia entre los focos es $2c=10$. Entonces $c=5$ y de la relación $b^2=c^2-a^2$, resulta $b^2=16$, es decir $b=4$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

En la Figura 3.44, se muestra la hipérbola y todos sus elementos. En este caso $b>a$, además:

$|LR|=2b^2/a=32/3$

$e=c/a=5/3$

$A(5,16/3)$; $A'(5,-16/3)$

$B(-5,16/3)$; $B'(-5,-16/3)$

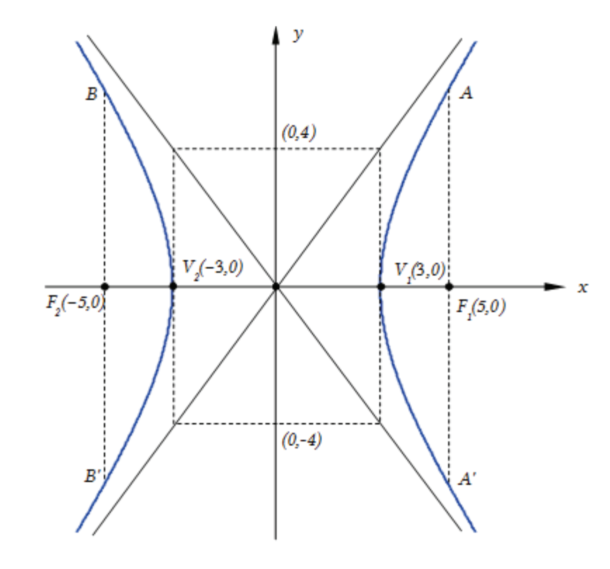


Figura 3.44.

✘ Ejercicio 3.25.

Dada la ecuación cuadrática $\frac{(y-5)^2}{16}-\frac{x^2}{16}=1$, identifique la cónica, sus elementos y represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 3.25.

A partir del análisis de la ecuación, podemos observar que los denominadores de los términos del primer miembro son iguales, por lo cual estamos en presencia de una hipérbola equilátera con a=4, b=4 (Figura 3.45).

De la relación b^2=c^2-a^2, obtenemos 16=c^2-16. Es decir $c = 4\sqrt{2}$.

Los restantes elementos de la hipérbola resultan:

C(0,5)

$F_1(0; 5 + 4\sqrt{2})$; $F_2(0; 5 - 4\sqrt{2})$

$V_1(0,9)$; $V_2(0,1)$

|LR|=2b^2/a=2.16/4 = 8

|LR|=8

$A(4{,}5 + 4\sqrt{2})$; $A'(-4{,}5 + 4\sqrt{2})$

$B(4{,}5 - 4\sqrt{2})$; $B'(-4{,}5 - 4\sqrt{2})$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

y=x+5;

y=-x+5

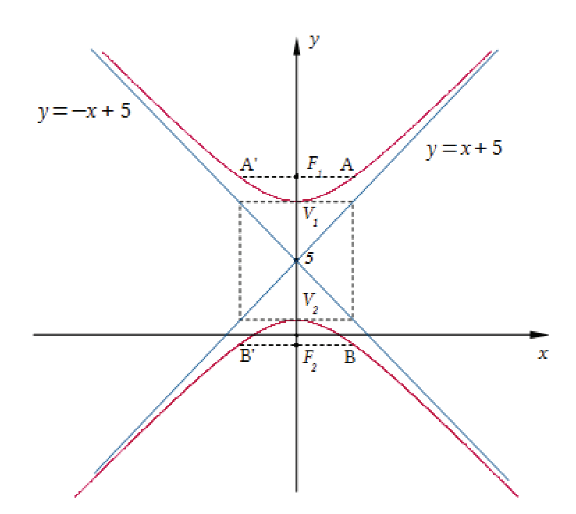


Figura 3.45.

✘ Ejercicio 3.26.

Dada la ecuación cuadrática x^2-9y^2+4x+4=0, identifique el lugar geométrico.

✘ Respuesta Ejercicio 3.26.

Los coeficientes que acompañan a x^2 e y^2, son de distinto signo. Aparentemente se trata de una hipérbola, sin embargo, al completar cuadrados resulta:

$(x^2+4x)-9y^2+4=0$

$(x^2+4x+4-4)-9y^2+4=0$

$(x+2)^2-4-9y^2+4=0$

$(x+2)^2-9y^2=0$

$(x+2)^2=9y^2$

Es decir:

$$y = \pm\sqrt{\frac{(x+2)^2}{9}}; \qquad y = \frac{1}{3}(x+2); \qquad y = -\frac{1}{3}(x+2)$$

Por lo tanto, se trata de dos rectas que se cortan.

Observación:

Para que la ecuación cuadrática $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ represente una hipérbola, los coeficientes de las variables cuadráticas deben ser de distinto signo. Luego de completar cuadrados resulta una expresión de la forma:

$A(x-h)^2+C(y-k)^2=M$

Si $M=0$, la ecuación cuadrática dada, representa 2 rectas que se cortan (tal como ilustra el ejercicio 3.26). Si $M\neq 0$, será siempre una hipérbola. Si A y M son ambos positivos, el eje focal es paralelo al eje x. Si A es positivo y M es negativo, el eje focal es paralelo al eje y.

✘ Ejercicio 3.27.

a) Escriba la ecuación de una hipérbola equilátera de centro C(h, k) y eje focal paralelo al eje x. Indique todos sus elementos y represente gráficamente.

b) Escriba la ecuación de una hipérbola equilátera de centro C(h, k) y eje focal paralelo al eje y. Indique todos sus elementos y represente gráficamente.

c) Indique las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad de las hipérbolas de los incisos anteriores.

3.6.4 Posiciones relativas entre recta e hipérbola

Para estudiar si la recta es ***secante***, ***tangente*** o ***exterior*** a la hipérbola, buscamos el o los puntos de intersección entre ambos lugares geométricos. Para ello, es necesario resolver, tal como planteamos en el estudio de las cónicas restantes, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

✘ Ejercicio 3.28.

Dada la hipérbola de ecuación $16x^2-9y^2-144=0$, y las siguientes rectas, determine para cada una de ellas su posición relativa con respecto a la cónica dada. Represente gráficamente.

a) L_1: $4x+3y=0$

b) L_2: $5x+3y+9=0$

c) L_3: $5x+3y+15=0$

✘ Respuesta Ejercicio 3.28.

a) L_1 es *exterior* a la hipérbola.

b) L_2 es *tangente* a la hipérbola.

c) L_3 es *secante* a la hipérbola.

3.6.5 Ecuación de una recta tangente a una hipérbola

Escribimos nuevamente la ecuación general de una hipérbola con centro C(h,k) y eje transversal (o eje focal) paralelo al eje x:

$b^2x^2-a^2y^2-2hb^2x+2ka^2y+(b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2)=0$

Para obtener la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera T(x_T, y_T) de la hipérbola (ver Figura 3.46), derivamos implícitamente la última ecuación, obteniendo:

$2b^2x-2a^2yy'-2hb^2+2ka^2y'=0$

Agrupamos los términos que dependen de y' y despejamos para obtener la siguiente relación:

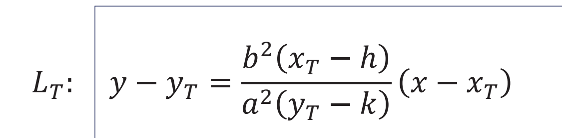
$$y' = \frac{b^2(x-h)}{a^2(y-k)}$$

Con esta expresión podemos evaluar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la hipérbola, con y-k no nulo. En particular nos interesa evaluar en el punto T(x_T, y_T), es decir:

$$y'_T = \frac{b^2(x_T-h)}{a^2(y_T-k)}$$

con $y_T-k\neq 0$

Entonces, la ecuación de la recta tangente a la hipérbola, que tiene pendiente y'_T y que pasa por el punto T(x_T, y_T) resulta la siguiente:



$$L_T: \quad y - y_T = \frac{b^2(x_T-h)}{a^2(y_T-k)}(x-x_T)$$

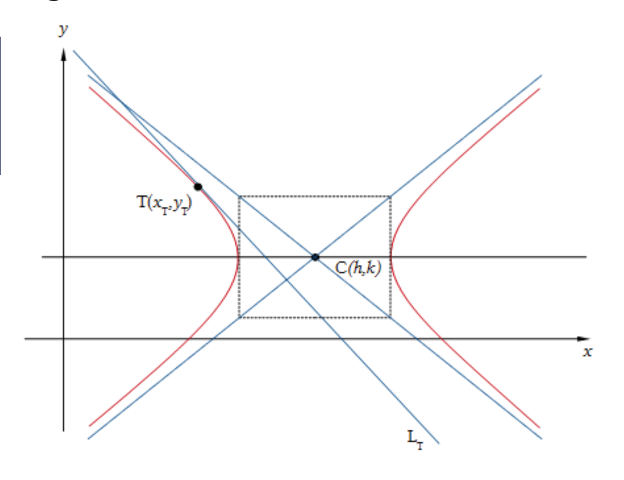


Figura 3.46.

✘ Ejercicio 3.29.

Determine una ecuación para la recta tangente a la hipérbola de centro C(h,k) y eje focal paralelo al eje y.

✘ Ejercicio 3.30.

Determine la ecuación general de la recta tangente a la hipérbola de ecuación $16x^2$-$9y^2$-144=0, en el punto T(-5, 16/3). Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 3.30.

L_T: $5x+3y+9=0$

3.6.6 Ecuaciones paramétricas de la hipérbola

Una representación paramétrica de la hipérbola de centro C(0,0) y eje focal sobre el eje x, está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x=a \sec\theta \\ y=b \,\mathrm{tg}\theta \qquad \theta \in (-\pi/2\,,\,\pi/2) \cup (\pi/2\,,\,3/2\pi) \end{cases}$$

Estas ecuaciones describen los puntos de una hipérbola para cada valor del parámetro θ dentro del rango especificado. A continuación buscamos eliminar el parámetro θ, para lo cual escribimos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = sec\theta \\ \dfrac{y}{b} = tg\ \theta \end{cases}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de cada ecuación y luego restamos miembro a miembro:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = sec^2\theta - tg^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{cos^2\theta} - \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas dadas representan una hipérbola de centro C(0,0) y eje transversal sobre el eje x.

A partir de la Figura 3.47 interpretaremos geométricamente el parámetro θ. En dicha figura hay dos circunferencias, el radio de la circunferencia menor es b y el radio de la circunferencia mayor es a. Para un cierto ángulo θ, ubicamos los puntos A y B de intersección de la semirrecta con las dos circunferencias respectivamente. Por el punto B se traza la tangente a la circunferencia de radio a. Designamos con T el punto de intersección de la recta tangente con el eje x. Llamamos C al punto de intersección de la semirrecta con la recta perpendicular al eje x trazada por el punto D, que es el punto de intersección del eje positivo x con la circunferencia de radio b. Por el punto C, se traza una recta paralela al eje x, que con la recta perpendicular al mismo eje, trazada por el punto T, determinan un punto P(x,y) de la hipérbola. Para dicho punto se cumple que:

$xcos\theta = a$	(ver triángulo OBT)	$x = a\ sec\theta$
$tg\theta = \frac{y}{b}$	(ver triángulo ODC)	$y = b\ tg\theta$

que son las ecuaciones paramétricas de la hipérbola.

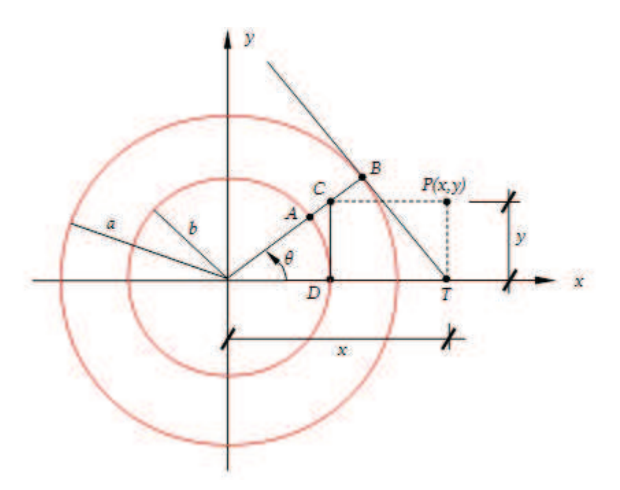


Figura 3.47.

✘ Ejercicio 3.31.

Indique ecuaciones paramétricas que representen una hipérbola de centro C(h,k) y eje focal paralelo al eje y. Verifique su respuesta.

✘ Respuesta Ejercicio 3.31.

$$\begin{cases} y=k + a \sec\theta \\ x=h + b \operatorname{tg}\theta \end{cases} \qquad \theta \in (-\pi/2,\pi/2) \cup (\pi/2,3/2\pi)$$

✘ Ejercicio 3.32.

Analice cómo se van describiendo los puntos de la hipérbola en cada cuadrante, al variar el parámetro θ. En otras palabras, estudie para qué valores de θ se describen puntos de la hipérbola en cada cuadrante.

3.6.7 Familias de hipérbolas

Una familia de hipérbolas es un conjunto de hipérbolas que satisfacen una determinada condición.

✘ Ejercicio 3.33.

Encontraremos la familia de hipérbolas cuyos vértices son: $V_1(-3,1)$ y $V_2(3,1)$

✘ Respuesta Ejercicio 3.33.

El centro de las hipérbolas de esta familia, está en el punto medio entre ambos vértices, es decir C(0,1). La hipérbola tiene eje transversal (o eje focal) horizontal, ya que los vértices y el centro se encuentran sobre la recta y=1. La longitud del eje transversal es $2a$=6. Por lo tanto, siendo $b^2=c^2-a^2$, resulta $b^2=c^2-9$. Entonces la ecuación de cualquier hipérbola de esta familia es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{c^2-9} = 1$$

Para que una hipérbola pertenezca a esta familia, observamos que debe ser $c>3$. En la Figura 3.48 se ilustran algunas hipérbolas pertenecientes a esta familia.

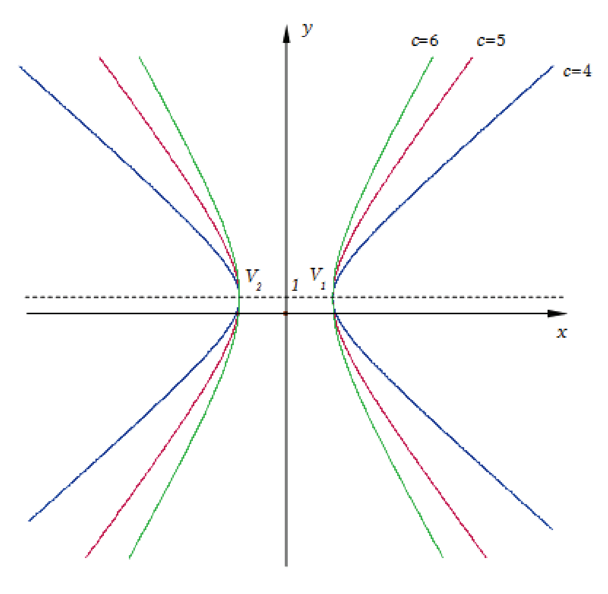


Figura 3.48.

Este ejercicio ilustra el análisis de excentricidad realizado previamente, ya que dejando fijo a, podemos ver qué pasa con las ramas de la hipérbola cuando la excentricidad cambia.

3.7 PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LAS SECCIONES CÓNICAS

3.7.1 Propiedades de reflexión

Veremos a continuación las propiedades de reflexión de las secciones cónicas, las cuales dan lugar a una gran variedad de aplicaciones prácticas.

. PARÁBOLA

Sea L_T la recta tangente a la parábola en un punto $P_0(x_0,y_0)$ de la misma (ver Figura 3.49). Los ángulos α y β que dicha recta determina con el segmento que se extiende desde el foco F hasta el punto P_0, y con la recta paralela al eje de simetría de la parábola, que pasa por P_0, son congruentes.

Si bien en la Figura 3.49 se ilustra esta propiedad para una parábola de eje horizontal, la propiedad de reflexión es válida para cualquiera de las parábolas estudiadas.

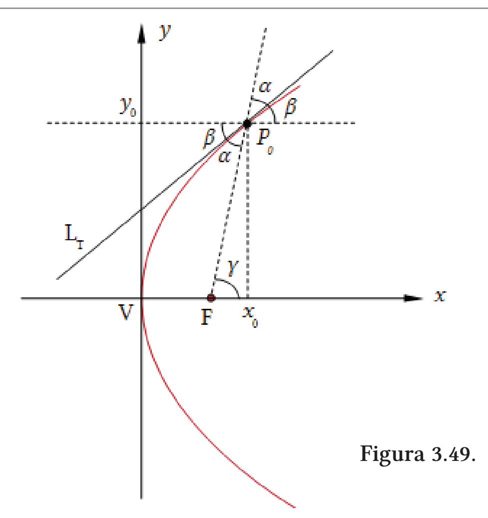


Figura 3.49.

✘ Ejercicio 3.34.

Demuestre la propiedad de reflexión de la parábola.

✘ Respuesta Ejercicio 3.34.

La ecuación de la parábola es $y^2=2px$

El punto $P_0(x_0,y_0)$ pertenece a la parábola, por lo tanto: $y_0^2=2px_0$, de donde $x_0=y_0^2/2p$

A partir de la ecuación de la parábola evaluamos y':

$2yy'=2p \quad \rightarrow \quad y'=p/y$

para y no nulo. En particular, en el punto $P_0(x_0,y_0)$, con y_0 no nulo, resulta:

$y'_0=p/y_0$

La pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto P_0, es entonces:

$y'_0=p/y_0=\text{tg}\beta$

Por otra parte vemos que $\gamma=\alpha+\beta$ y de la Figura 3.49 evaluamos tgγ como el cociente entre cateto opuesto sobre cateto adyacente, es decir:

$$tg\ \gamma = \frac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}}$$

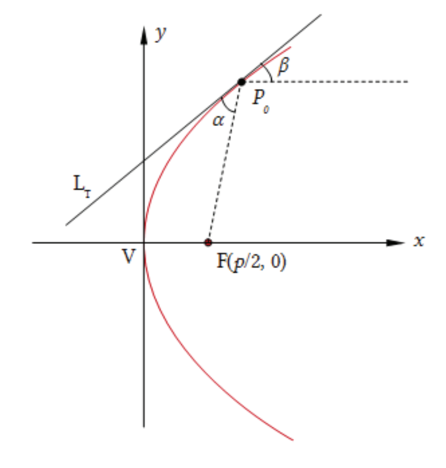


Figura 3.50.

Sustituimos en esta expresión el valor de x_0 por la expresión hallada anteriormente, $x_0=y_0^2/2p$, de donde resulta:

$$tg\ \gamma = \frac{y_0}{\frac{y_0^2}{2p} - \frac{p}{2}} = \frac{2py_0}{(y_0^2 - p^2)}$$

A partir de $\gamma=\alpha+\beta$, obtenemos $\alpha=\gamma-\beta$. Es decir, podemos evaluar tgα a partir de la siguiente relación:

$$tg\alpha = \frac{tg\gamma - tg\beta}{1 + tg\gamma\ tg\beta}$$

Sustituyendo en esta última ecuación, las expresiones ya obtenidas para tgβ y para tgγ se llega a:

$tg\alpha = p/y_0$

de donde vemos que $tg\ \alpha$ =tgβ .

. ELIPSE

Sea L_T, la recta tangente a la elipse en un punto $P_0(x_0,y_0)$ de la misma (ver Figura 3.51). Los ángulos α y β que dicha recta determina con los segmentos que se extienden desde ambos focos hasta el punto P_0, son congruentes.

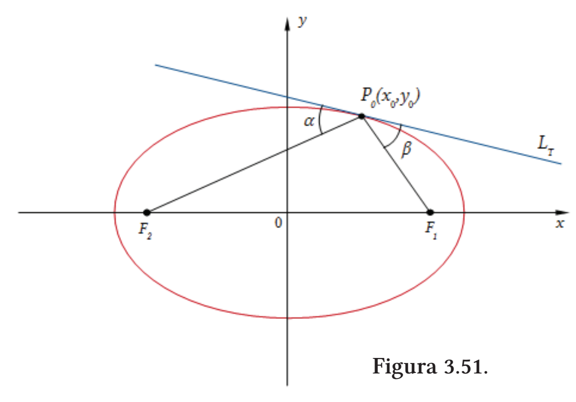


Figura 3.51.

. HIPÉRBOLA

Sea L_T, la recta tangente a la hipérbola en un punto $P_0(x_0,y_0)$ cualquiera de la misma (ver Figura 3.52).

Si se dirige un haz de luz en dirección de uno de los focos, por ejemplo F_1, el mismo se reflejará en el punto P_0, en dirección al otro foco F_2. Esto se debe a que el ángulo de incidencia que forma el rayo de luz con la recta L_T, tangente en P_0, es congruente con el ángulo de reflexión formado por dicha recta y el segmento determinado por el punto de incidencia P_0 y el foco F_2.

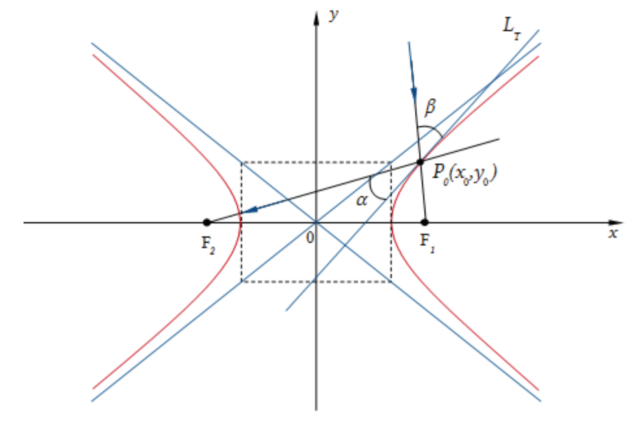


Figura 3.52.

3.7.2 Aplicaciones de las cónicas

. PARÁBOLA

La parábola posee variadas aplicaciones entre las cuales es posible mencionar las correspondientes al ámbito ingenieril , arquitectónico y de las ciencias en general.

Una gran cantidad de fenómenos científicos responden a ecuaciones cuadráticas por lo cual la parábola es parte integrante de la representación gráfica de las variables que gobiernan dichos fenómenos.

La propiedad de reflexión de la parábola se utiliza ampliamente en la construcción de espejos (de luz o sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde el foco, se refleja paralela al eje de la parábola. A la inversa, una emisión de luz o sonido que incide en forma paralela al eje de la parábola, se concentra en el foco de la misma.

Al hacer girar una parábola en torno de su eje de simetría, se obtiene una superficie denominada *paraboloide* (que estudiaremos en detalle en el último capítulo). Los faros de los automóviles, las antenas de radar y microondas, antenas de televisión satelital y hornos solares, por citar algunos, son ejemplos de paraboloides que hacen uso de la mencionada propiedad de reflexión.

Las antenas satelitales parabólicas y los radiotelescopios emplean la propiedad de reflexión de ondas electromagnéticas, tanto para recibir como para enviar señales a estaciones de radio o satélites de comunicación.

Otras aplicaciones de la parábola se dan en el tiro parabólico de proyectiles o en los cables de puentes colgantes. En este último caso, el cable soporta un peso mucho mayor que su propio peso y entonces toma la forma de una parábola. Cabe señalar que cuando el cable cuelga soportando su propio peso, el mismo describe una curva denominada *catenaria*.

Es posible encontrar además variadas aplicaciones de la parábola en arquitectura. Existen numerosas edificaciones en las cuales es posible encontrar parábolas, configurando formas de cubiertas de techo, formando arcos resistentes de puentes y pasarelas, dinteles y delimitando espacios horizontales en general.

. ELIPSE

Al hacer girar una elipse en torno de uno de sus ejes se obtiene una superficie llamada *elipsoide de revolución*, que estudiaremos en detalle en el último capítulo. Si se emite un rayo desde un foco del elipsoide y el mismo incide sobre la superficie del mismo, éste se reflejará pasando por el otro foco.

Esta propiedad se aplica por ejemplo en hornos para la fabricación de cristales. Se trata de recipientes con forma de elipsoide de revolución, con pared interior de material refractante, en los que se coloca una fuente de calor en uno de sus focos y el objeto a calentar en el otro foco.

Otra aplicación es a partir de ondas sonoras en una habitación cuyo techo tiene la forma de elipsoide de revolución. Si se sitúan dos personas en cada uno de los focos, se escucharán entre sí, aunque hablen en voz muy baja y otras personas de la habitación no puedan oírlas. En los museos, suelen existir las denominadas "*Galerías de los Susurros*" que utilizan esta propiedad.

En Astronomía encontramos una de las principales aplicaciones de la elipse. El astrónomo alemán *Johannes Kepler* (1570-1630) descubrió que los planetas giran alrededor del sol describiendo trayectorias elípticas, con el sol situado en uno de los focos. El matemático y físico inglés *Isaac Newton* (1642-1727) demostró las *Leyes de Kepler* utilizando el Cálculo Diferencial.

Al igual que en la parábola, también existen aplicaciones de la elipse en la arquitectura, donde se la puede encontrar como parte integrante de formas que definen cubiertas de techos de grandes superficies y de arcos resistentes de puentes y cubiertas en general.

. HIPÉRBOLA

Si se hace girar una hipérbola en torno de uno de sus ejes es posible obtener una superficie denominada *hiperboloide de revolución*.

La propiedad de reflexión de la hipérbola se utiliza en la construcción de telescopios con determinadas propiedades, que combinan un espejo parabólico y otro hiperbólico. Otra aplicación se da en diversos sistemas de navegación, los cuales a partir de la aplicación de propiedades de la hipérbola, permiten determinar al operador la posición de un barco o de un avión con respecto al sistema de referencia utilizado.

3.8 ACTIVIDADES DE REPASO Y AUTOEVALUACIÓN

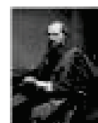
- Conceptualice ("defina") con sus propias palabras, los lugares geométricos denominados circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
- Escriba las ecuaciones de cada una de las cónicas mencionadas en su posición normal.
- Identifique todos los elementos pertenecientes a cada una de las cónicas estudiadas.
- Represente gráficamente cada una de las secciones cónicas estudiadas, indicando todos sus elementos.
- Defina adecuadamente el concepto de excentricidad para cada una de las secciones cónicas.
- Estudie la influencia de cambios en la excentricidad en las formas de la elipse y de la hipérbola.
- Escriba las ecuaciones de cada una de las cónicas con centro en un punto de coordenadas (h,k).
- Identifique todos los elementos de las secciones cónicas cuando su centro no coincide con el origen de coordenadas.
- Represente gráficamente cada cónica en su posición trasladada, indicando todos sus elementos.
- Indique las correspondientes ecuaciones *paramétricas* de cada una de las secciones cónicas estudiadas, interpretando en cada uno de los casos el parámetro adoptado.
- Sintetice los conceptos estudiados y elabore un mapa conceptual referido a los contenidos de los anteriores puntos.
- Describa un procedimiento que permita estudiar las posiciones relativas entre una recta dada L y una cónica conocida.
- Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de la recta tangente a cada una de las cónicas estudiadas en un punto perteneciente a las mismas y particularice dichas ecuaciones para cada cónica.
- Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de las rectas tangentes a cada una de las cónicas estudiadas por un punto exterior a la misma.
- Identifique familias de circunferencias, familias de parábolas, familias de elipses y familias de hipérbolas.
- Indique las condiciones que debe cumplir una ecuación de segundo grado en dos variables x e y (sin la presencia del término rectangular xy), para que la

misma represente una circunferencia, una elipse, una hipérbola o una parábola, según el caso.

- Describa un procedimiento general que permita, dada una ecuación cuadrática en dos variables x e y (sin la presencia del término rectangular xy), indicar de qué cónica se trata e identificar todos sus elementos.
- Describa la propiedad de reflexión para la parábola, la elipse y la hipérbola. Represente gráficamente e ilustre algunas aplicaciones prácticas de dichas propiedades.
- Reflexione, investigue y enumere ejemplos de estructuras o elementos reales, pertenecientes al ámbito de la ingeniería, la arquitectura y las ciencias, que a su entender se puedan expresar y describir geométricamente por medio de las ecuaciones de las cónicas.

Capítulo 4:

Coordenadas Polares



"Cuando puedes medir aquello de lo que hablas, y expresarlo con números, sabes algo acerca de ello; pero cuando no lo puedes medir, cuando no lo puedes expresar con números, tu conocimiento es pobre e insatisfactorio: puede ser el principio del conocimiento, pero apenas has avanzado en tus pensamientos a la etapa de ciencia".

William Thomson Kelvin (1824-1907).

4.1 INTRODUCCIÓN

Hasta el momento hemos estado trabajando con el *sistema de coordenadas cartesiano*, también denominado *rectangular*. Con dicho sistema, la posición de un punto cualquiera P queda definida por un par ordenado de números reales (x,y) que representan las distancias del punto P a un par de ejes ortogonales entre sí que se cortan en el punto O, origen del sistema de coordenadas.

En este capítulo presentaremos otro sistema de coordenadas, llamado *sistema de* ***coordenadas polares***, en el cual, las coordenadas de un punto P cualquiera quedan determinadas por la distancia ρ a un punto fijo del plano llamado ***polo*** y por una dirección a partir de una recta fija llamada ***eje polar***.

La selección adecuada de un sistema de coordenadas depende del tipo de problema que se deba resolver. En algunas situaciones puede resultar indistinto el uso del sistema rectangular o el polar, pero en otras es preferible el uso de alguno de los dos sistemas. También se dan casos para los cuales es conveniente usar ambos sistemas de coordenadas, cambiando de uno a otro según la necesidad.

El primero en utilizar coordenadas polares fue *Isaac Newton* (1642-1727). En este capítulo estudiaremos las *ecuaciones polares* de rectas, secciones cónicas y otras curvas.

4.2 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Un sistema de coordenadas polares está determinado por una recta fija del plano llamada ***eje polar***, un punto fijo O de la misma, denominado ***polo***, y una unidad de medida.

4.2.1 Definición

Definición: Las *coordenadas polares* de un punto P del plano, es el par ordenado de números reales (ρ,θ), donde ρ mide la longitud del segmento OP y θ es el ángulo determinado por la parte positiva del *eje polar* y el segmento OP (ver Figura 4.1) considerando como positivo el sentido antihorario.

Para obtener todos los puntos del plano, debemos variar:

$0 \leq \theta < 2\pi$

$0 \leq \rho < +\infty$

Se designa a ρ como *radio vector* y a θ, como *ángulo polar*.

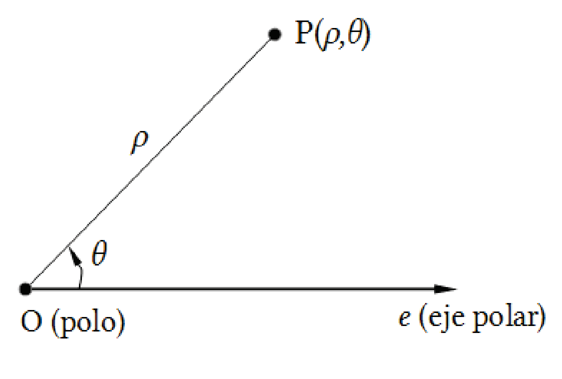


Figura 4.1.

Cabe señalar que también podría adoptarse $0 \leq \theta < \pi$ *y* $-\infty \leq \rho < +\infty$ pero adoptamos la definición dada previamente.

✘ Ejercicio 4.1.

Determine la ubicación de los siguientes puntos dados en coordenadas polares: $P(3,\pi/4)$; $S(3/2,0)$; $Q(3,5\,\pi/4)$; $T(1,3\,\pi/4)$; $R(2,\pi/2)$; $U(3/2,\pi)$

✘ Respuesta Ejercicio 4.1.

En la Figura 4.2, se representan los puntos dados en un sistema de coordenadas polares:

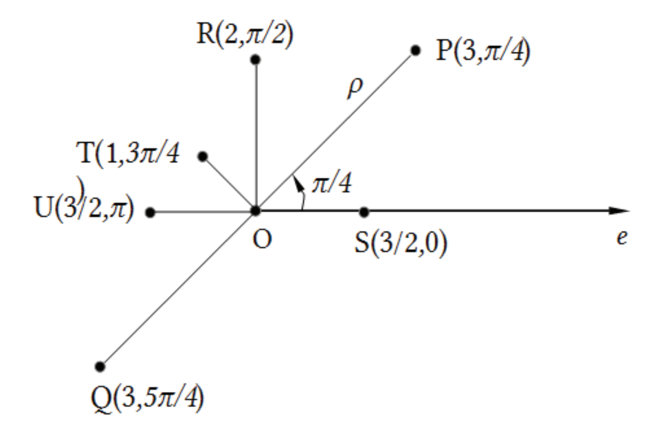


Figura 4.2.

Cabe observar que el polo queda definido con ρ=0, es decir las coordenadas polares del polo son: $O(0,\theta)$, es decir ρ=0, para todo valor del ángulo polar θ.

4.3 RELACIONES ENTRE COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

Al resolver un problema suele ser necesario transformar las ecuaciones del mismo de coordenadas polares a rectangulares y viceversa. Para encontrar las expresiones que nos permiten transformar de un sistema a otro, colocamos los dos sistemas de coordenadas, de modo tal que sus orígenes coincidan y el eje polar se encuentre a lo largo del eje positivo *x*, tal como puede observarse en la Figura 4.3:

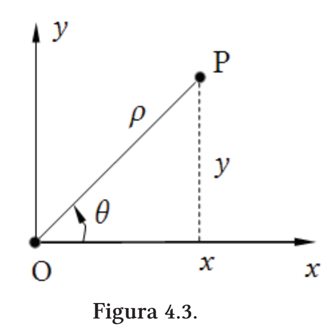


Figura 4.3.

Sean $P(x,y)$, las coordenadas rectangulares del punto P y $P(\rho,\theta)$ las coordenadas polares del mismo punto P. De la Figura 4.3, podemos expresar x e y en función de ρ y θ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

También es posible determinar las coordenadas polares (ρ,θ), en términos de las coordenadas rectangulares, a partir de las expresiones dadas por:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ tg\theta = \dfrac{y}{x}; \end{cases} \qquad x \neq 0$$

A los efectos de obtener valores de θ en todos los cuadrantes, consideraremos las siguientes relaciones, que toman en cuenta los signos correspondientes a x y a y (ambos no nulos simultáneamente):

$$sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

✘ Ejercicio 4.2.

a) Exprese en coordenadas polares el punto Q(3,3) y la curva $x^2+y^2=36$

b) Exprese en coordenada rectangulares el punto R(4,π/3) y la ecuación:

$$\rho = \frac{1}{cos\theta + 4sen\theta}$$

✘ Respuesta Ejercicio 4.2.

a) $Q\left(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$; $\rho=6$

b) $R\left(2, 2\sqrt{3}\right)$; $x+4y-1=0$

4.4 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES

Sean los puntos del plano en coordenadas polares $P_1(\rho_1,\theta_1)$ y $P_2(\rho_2,\theta_2)$. Queremos encontrar la distancia entre ambos (ver Figura 4.4), es decir:

$$d = \|\boldsymbol{P_1P_2}\|$$

Usando el teorema del coseno en el triángulo OP_1P_2, se tiene que:

$$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

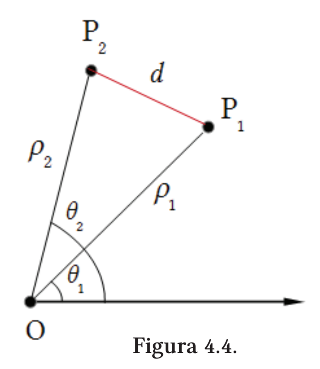


Figura 4.4.

4.5 ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN COORDENADAS POLARES

La ecuación de la circunferencia en coordenadas polares, se puede obtener transformando la ecuación de la misma de coordenadas rectangulares a polares. Pero también se puede deducir directamente trabajando en coordenadas polares.

Si tenemos como datos el centro de la circunferencia en coordenadas polares, $C(\rho_1,\theta_1)$, y el radio r de la misma, podemos determinar su ecuación en coordenadas polares de la siguiente manera:

Sea $P(\rho,\theta)$ un punto genérico de la circunferencia. En la Figura 4.5, observamos que es posible plantear el teorema del coseno en el triángulo OCP, obteniendo de este modo la siguiente expresión:

$$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 cos(\theta - \theta_1)$$

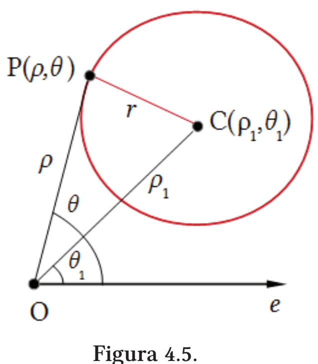


Figura 4.5.

Veamos a continuación algunos casos particulares que pueden derivarse de la ecuación anterior.

. LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO r PASA POR EL POLO Y SU CENTRO SE ENCUENTRA SOBRE EL EJE POLAR, A LA DERECHA O A LA IZQUIERDA DEL POLO.

Cuando la circunferencia de radio r pasa por el polo y su centro está ubicado sobre el eje polar, a la derecha del mismo, (ver Figura 4.6), las coordenadas del centro son $C(r,0°)$.

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación anterior, resulta:

$$r^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r cos(\theta) \quad \rightarrow \quad \rho(\rho - 2rcos\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = 2rcos\theta$$

Cuando la circunferencia de radio r pasa por el polo y su centro está a la izquierda del polo sobre el eje polar, las coordenadas del mismo son C(r,π).

Reemplazando estas coordenadas en la ecuación de la circunferencia obtenida al inicio, llegamos a:

$$\rho = -2rcos\theta$$

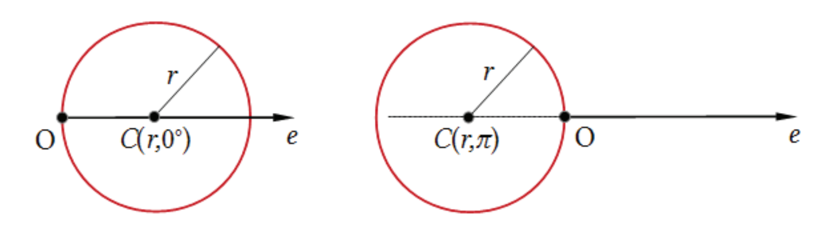


Figura 4.6.

. LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO r PASA POR EL POLO Y SU CENTRO SE ENCUENTRA SOBRE EL EJE A 90°, POR ENCIMA O POR DEBAJO DEL POLO.

Cuando la circunferencia de radio r pasa por el polo y su centro se encuentra sobre el eje perpendicular al eje polar y por encima del polo, (ver Figura 4.7), las coordenadas del mismo son C(r,$\pi/2$). Entonces, al sustituir dichas coordenadas en la ecuación de la circunferencia, obtenemos:

$$r^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 = \rho^2 - 2\rho r sen\theta$ que podemos escribir como $0 = \rho(\rho - 2rsen\theta)$

De donde surge la siguiente expresión: $\rho = 2rsen\theta$

Cuando la circunferencia de radio r pasa por el polo y su centro se encuentra sobre el eje a 90°, por debajo del polo, las coordenadas del mismo resultan C(r,$3/2\pi$). Por lo tanto la sustitución de dichas coordenadas en la ecuación de la circunferencia genérica inicialmente obtenida, conduce a: $\rho = -2rsen\theta$

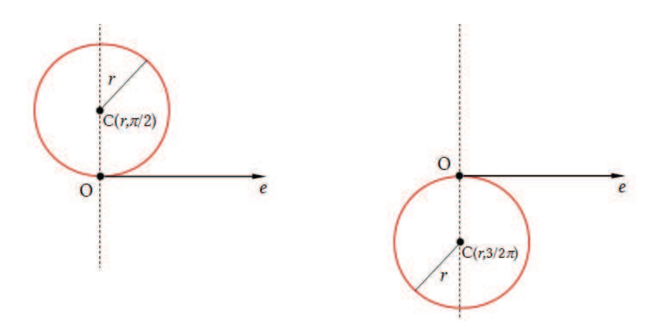


Figura 4.7.

. LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO r TIENE SU CENTRO EN EL POLO.

En este caso ρ_1=0, ya que el centro está en el polo (ver Figura 4.8), y θ_1=θ, por lo que la ecuación resulta:

$$r^2 = \rho^2 + 0^2 - 2\rho 0 cos(\theta - \theta_1)$$

$$r^2 = \rho^2$$

Es decir,

$$\rho = r$$

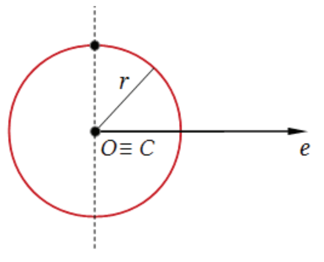


Figura 4.8.

Lógicamente, en este caso se trata del lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo radio vector es *r*, para todo valor de θ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

✘ Ejercicio 4.3.

Identifique la curva de ecuación $\rho = -8cos\theta$ y represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 4.3.

A partir de la comparación con las ecuaciones estudiadas, surge que se trata de la ecuación de una circunferencia en coordenadas polares, que pasa por el polo y su centro está en C(4,π), siendo *r*=4.

Si no hacemos uso de dicha comparación, podemos realizar una tabla de valores (ρ,θ) y representar los puntos obtenidos. Entonces, siendo $\rho = -8cos\theta$ calculamos los valores de ρ para distintos ángulos seleccionados y luego graficamos:

θ	ρ
0	-
$\pi/2$	0
π	8
$3/2\pi$	0
$\pi/4$	-
$3\pi/4$	$4\sqrt{2}$
$5\pi/4$	$4\sqrt{2}$
$2\pi/3$	4
$4\pi/3$	4

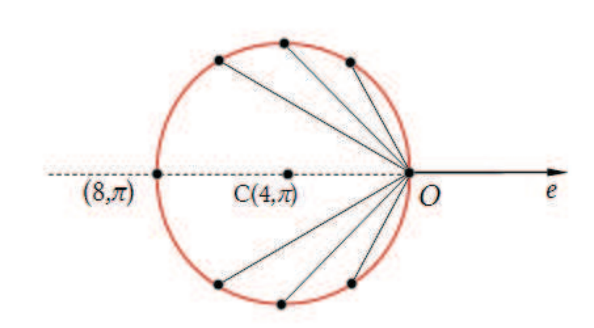


Figura 4.9.

4.6 ECUACIÓN DE LA RECTA EN COORDENADAS POLARES

La ecuación de la recta en coordenadas polares se puede obtener transformando la ecuación de la recta de coordenadas cartesianas a polares. Pero también se puede deducir trabajando directamente en coordenadas polares. En este caso, los datos son las coordenadas polares de un punto $P_1(\rho_1,\theta_1)$ de la recta cuya ecuación se busca determinar, tal que el segmento OP_1 que se extiende desde el polo hasta el punto P_1 es perpendicular a dicha recta. $P(\rho,\theta)$ es un punto cualquiera de la recta. A partir de la Figura 4.10, observamos el triángulo rectángulo OP_1P y planteamos:

$$\rho cos(\theta - \theta_1) = \rho_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{\rho_1}{cos(\theta - \theta_1)}}$$

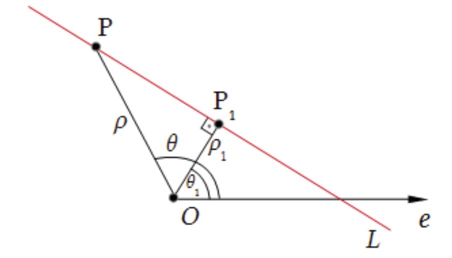


Figura 4.10.

. RECTA PERPENDICULAR AL EJE POLAR, A LA DERECHA O A LA IZQUIERDA DEL POLO

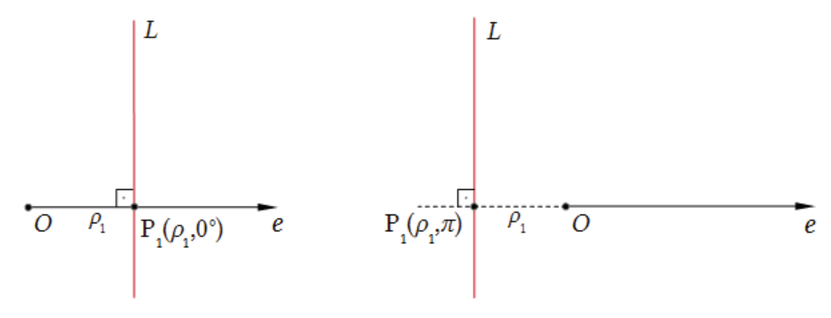


Figura 4.11.

Cuando la recta es perpendicular al eje polar, el punto P_1 es el punto de intersección de la recta con el eje polar. Si se encuentra a la derecha del polo, θ_1=0, y por lo tanto la ecuación de la recta toma la forma:

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_1}{cos\theta}}$$

En cambio, si la recta está ubicada a la izquierda del polo, corresponde $\theta_1=\pi$, que al ser sustituido en la ecuación de la recta queda de la siguiente manera:

$$\rho = -\frac{\rho_1}{cos\theta}$$

. RECTA PARALELA AL EJE POLAR, POR ENCIMA O POR DEBAJO DEL POLO

Cuando la recta es paralela al eje polar, (ver Figura 4.12), el punto P_1 se encuentra en la intersección de la vertical que pasa por el polo (el eje a 90°) y la recta. Si se encuentra por encima del polo, $\theta_1=\pi/2$, y en este caso la ecuación de la recta toma la forma:

$$\rho = \frac{\rho_1}{sen\theta}$$

Si la recta es paralela al eje polar, por debajo del polo, $\theta_1=3/2\pi$, y por lo tanto la ecuación resulta:

$$\rho = -\frac{\rho_1}{sen\theta}$$

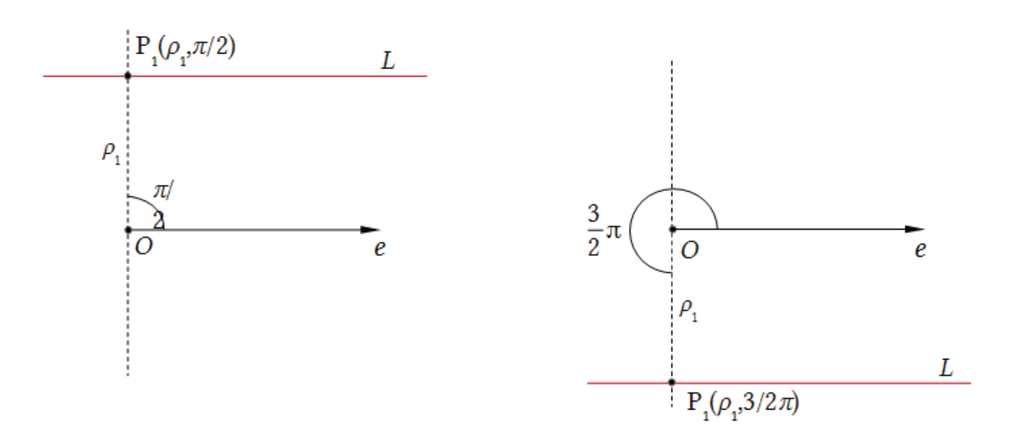


Figura 4.12.

. RECTA QUE PASA POR EL POLO

Si la recta pasa por el polo, las coordenadas polares del punto P_1 son $\rho_1=0$, para todo valor de θ_1. Es decir $P_1(0,\theta_1)$. Sustituyendo estas coordenadas polares en la ecuación de la recta es posible obtener:

$$\rho = \frac{\rho_1}{cos(\theta - \theta_1)}$$

$$\rho cos(\theta - \theta_1) = 0$$

$$cos(\theta - \theta_1) = 0$$

$$\theta - \theta_1 = n\frac{\pi}{2} \qquad n = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

$$\boxed{\theta = \theta_1 + n\frac{\pi}{2}}$$

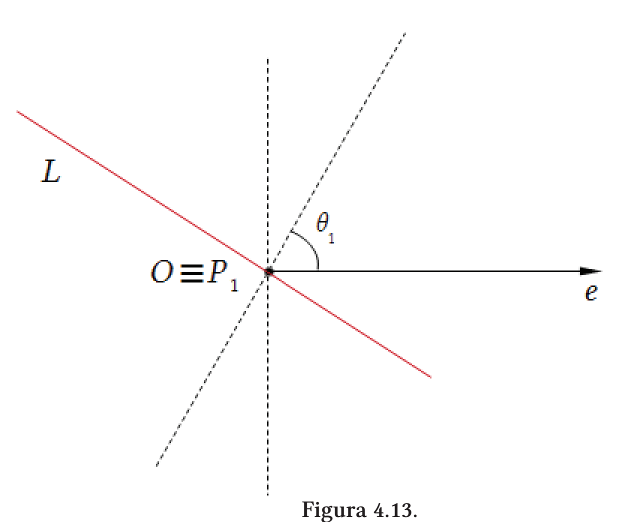


Figura 4.13.

✘ Ejercicio 4.4.

Determine la ecuación polar de la recta que pasa por el punto Q(3,π/3) y es perpendicular al eje polar.

✘ Respuesta Ejercicio 4.4.

En la Figura 4.14, vemos que: $\rho_1 = 3cos\frac{\pi}{3} = 1.50$

$P_1(1.5,0°)$. Por lo tanto, sustituyendo en $\rho = \frac{\rho_1}{cos(\theta - \theta_1)}$, resulta

$$\rho = \frac{1.5}{cos\theta}$$

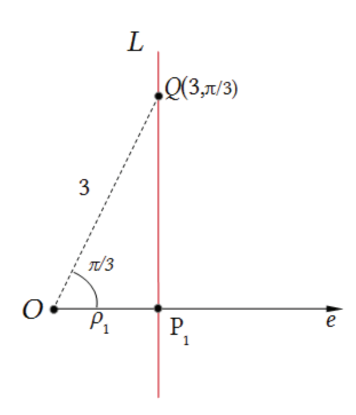


Figura 4.14.

4.7 ECUACIÓN DE LAS CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES

Para obtener la ecuación polar de las cónicas plantearemos en primer lugar la definición general de cónicas. A partir del concepto de excentricidad, dicha definición incluye a la parábola, la elipse y la hipérbola.

. DEFINICIÓN GENERAL DE LAS CÓNICAS

> **Definición:** ***Cónica*** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la relación entre su distancia a un punto fijo llamado ***foco*** y su distancia a una recta fija que no contiene al foco llamada ***directriz****,* es igual a una constante *e*, llamada ***excentricidad***.

Si *e*=1, la cónica es una ***parábola***.

Si 0<*e*<1, la cónica es una ***elipse***.

Si *e*>1, la cónica es una ***hipérbola***.

A partir de la Figura 4.15, observamos que para deducir la ecuación polar de las cónicas, hacemos coincidir el foco de las mismas, con el polo del sistema de coordenadas polares. En primer lugar consideraremos la directriz perpendicular al eje polar y a la izquierda del polo. La distancia del foco a la directriz es el parámetro geométrico p. P(ρ,θ) es un punto genérico de la cónica. De acuerdo a la definición general de cónicas, planteamos que:

$$e=\frac{\|\boldsymbol{PF}\|}{\|\boldsymbol{PD}\|}$$

Donde:

$$\|\boldsymbol{PF}\|=\rho$$

$$\|\boldsymbol{PD}\|=p+\rho cos\theta$$

Por lo tanto:

$$\rho=e(p+\rho cos\theta)$$

$$\rho=ep+e\rho cos\theta$$

$$\rho(1-ecos\theta)=ep$$

$$\rho=\frac{ep}{(1-ecos\theta)}$$

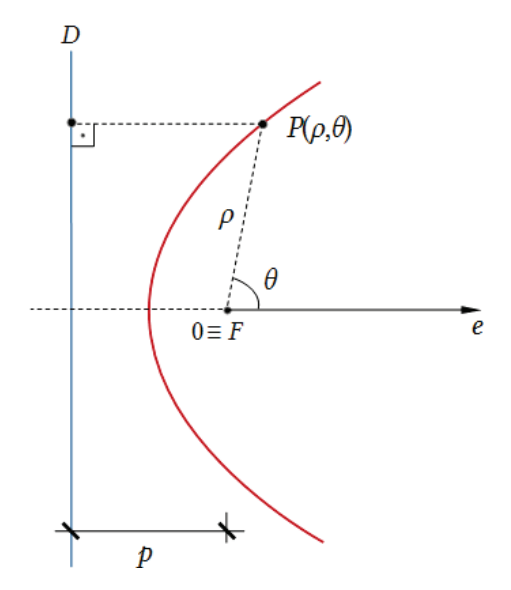


Figura 4.15.

Esta última expresión corresponde a la *ecuación de las cónicas en coordenadas polares*.

En dicha ecuación, si *e*=1 se trata de una *parábola*, si *e* está entre 0 y 1, de una *elipse* y si *e* >1 de una *hipérbola*. Una vez determinado el tipo de cónica a partir del valor de *e*, el siguiente paso es encontrar los puntos donde la curva corta al eje polar y a la recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar (eje a 90°).

Estos puntos, se obtienen dando a θ los valores 0, π, $\pi/2$, y $3/2\pi$ respectivamente. Cabe señalar que para la parábola sólo se pueden usar tres de estos valores, ya que uno haría cero el denominador. Con estos puntos en general es suficiente para realizar una gráfica aproximada de la cónica estudiada.

Si en la ecuación obtenida, evaluamos ρ para θ=π/2, llegamos a la siguiente expresión: $\rho_{\frac{\pi}{2}} = ep$, que corresponde a la mitad de la longitud del lado recto. Efectivamente si e=1, $\rho_{\frac{\pi}{2}} = p$, tal como sabemos del estudio de las parábolas realizado en coordenadas rectangulares.

Si e≠1, entonces, $\rho_{\frac{\pi}{2}} = ep$

Para la elipse y la hipérbola sabemos que la excentricidad se puede evaluar como $e = \frac{c}{a}$ y que la longitud del lado recto es $2\frac{b^2}{a}$. Sustituyendo en $\rho_{\frac{\pi}{2}} = ep$ resulta:

$$\rho_{\frac{\pi}{2}} = ep = \frac{c}{a}p \quad \rightarrow \quad \frac{c}{a}p = \frac{b^2}{a} \quad \rightarrow \quad p = \frac{b^2}{c}$$

O sea que las dos directrices correspondientes a cada foco, tanto en la elipse como en la hipérbola, se encuentran a una distancia $\frac{b^2}{c}$ del respectivo foco.

✘ Ejercicio 4.5.

Deduzca la ecuación polar de las cónicas para las siguientes situaciones:

a) Directriz perpendicular al eje polar, a la derecha del polo.

b) Directriz paralela al eje polar, por encima del polo.

c) Directriz paralela al eje polar, por debajo del polo.

✘ Respuesta Ejercicio 4.5.

a) $\rho = \frac{ep}{(1+ecos\theta)}$

b) $\rho = \frac{ep}{(1+e\ sen\theta)}$

c) $\rho = \frac{ep}{(1-e\ sen\theta)}$

✘ Ejercicio 4.6.

Dadas las ecuaciones I y II en coordenadas polares, indique para cada una de ellas de qué cónica se trata, justificando su respuesta. Represente en coordenadas polares ambas curvas indicando en cada caso las coordenadas polares del centro y de los focos.

$$\rho = \frac{6}{1+\frac{1}{2}cos\theta}\ (I); \qquad \rho = \frac{12}{2 - sen\theta}\ (II)$$

✘ Respuesta Ejercicio 4.6.

I) Siendo $e=1/2 < 1$, se trata de una elipse. Calculamos algunos valores de ρ para ciertos ángulos θ y graficamos. En la Figura 4.16 observamos la elipse de eje focal sobre el eje polar. Las coordenadas del centro y de los focos son:

$C(4,\pi)$; $F_1(0,0)$; $F_2(8,\pi)$

θ	$\cos\theta$	ρ
0	1	4
$\pi/2$	0	6
π	−1	12
$3/2\pi$	0	6

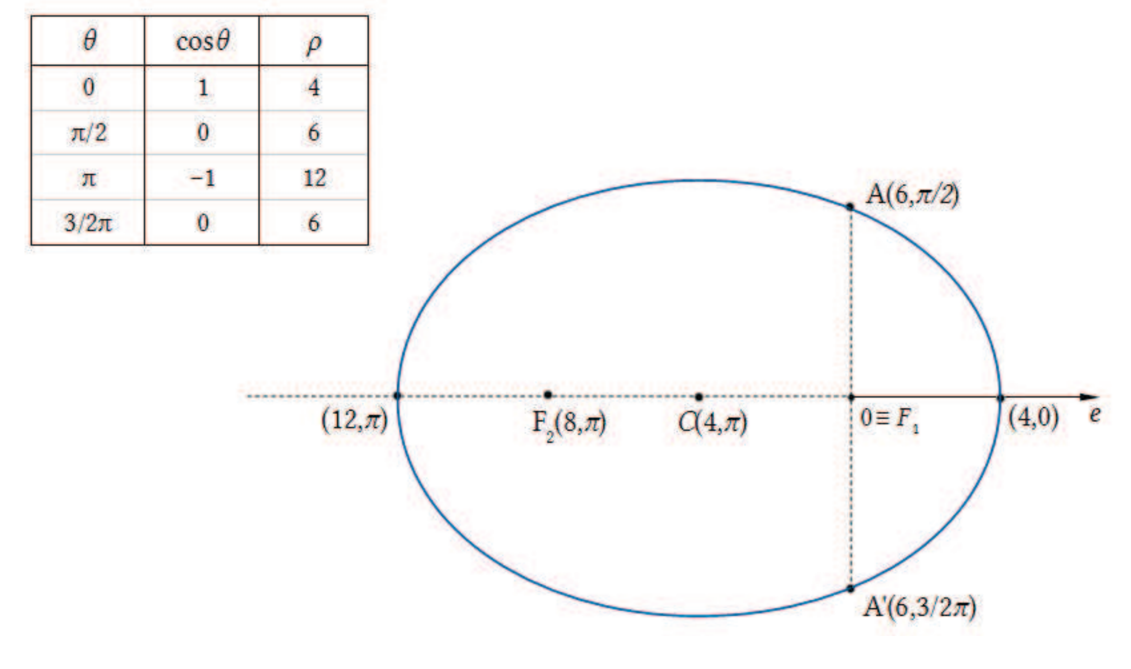


Figura 4.16.

II) Siendo la ecuación $\rho = \frac{12}{2-sen\theta}$ debemos llevarla a alguna de las formas vistas:

$$\rho = \frac{12}{2\left(1-\frac{1}{2}sen\theta\right)} = \frac{6}{1-\frac{1}{2}sen\theta}$$

Ahora podemos afirmar que siendo $e=1/2 < 1$, se trata también de una elipse. Calculamos algunos puntos especiales de la curva y graficamos. En la Figura 4.17 observamos la elipse de eje focal sobre el eje a 90°. Las coordenadas del centro y de los focos son: $C(4,\pi/2)$; $F_1(0,0)$; $F_2(8,\pi/2)$

θ	$\cos\theta$	ρ
0	0	6
$\pi/2$	1	12
π	0	6
$3/2\pi$	−1	4

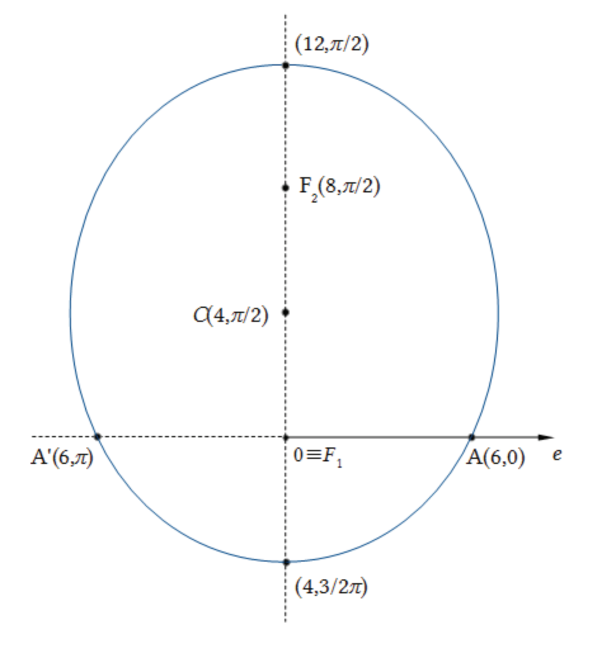


Figura 4.17.

4.8 TRAZADO DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES

Consideraremos ahora el problema del trazado de curvas planas cuando su ecuación está dada en coordenadas polares.

> **Definición:** La gráfica de una ecuación ρ=f(θ) en coordenadas polares, es el conjunto de todos los puntos (ρ,θ), cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Veremos el trazado de las curvas en coordenadas polares mediante el análisis del siguiente ejemplo: $\rho = 4 + 4\, cos\theta$

. INTERSECCIÓN DE LA CURVA CON EL EJE POLAR Y EL EJE AUXILIAR A 90°

Intersección con el eje polar:

θ	ρ
0	8
π	0

Intersección con el eje a 90°:

θ	ρ
π/2	4
3/2π	4

. SIMETRÍA

. *La gráfica es simétrica con respecto al eje polar, si la ecuación no se altera cuando θ se reemplaza por 2π-θ.* En nuestro caso tendremos:

$$\cos (2\pi\text{-}\theta)=\cos \theta$$

con lo cual reemplazando en la ecuación dada, obtenemos:

$$\rho = 4 + 4\, cos(2\pi - \theta) = 4 + 4\, cos\theta$$

por lo que existe simetría respecto al eje polar.

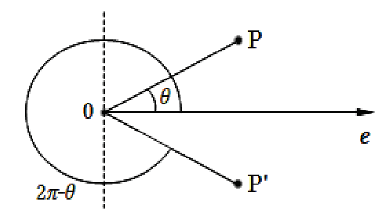


Figura 4.18.

. *La gráfica es simétrica con respecto al eje a 90°, si la ecuación no se altera cuando θ se reemplaza por π-θ.* En nuestro problema tendremos:

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

con lo cual reemplazando en la ecuación dada, obtenemos:

$$\rho = 4 + 4\cos(\pi - \theta) = 4 - 4\cos\theta$$

Por lo tanto en este ejemplo no existe simetría respecto al eje a 90°.

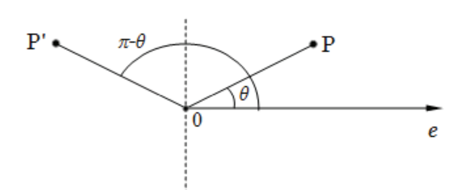


Figura 4.19.

. *La gráfica es simétrica con respecto al polo si la ecuación no se altera cuando θ se reemplaza por π+θ.* En nuestro caso tendremos:

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,$$

con lo cual reemplazando en la ecuación dada, obtenemos:

$$\rho = 4 + 4\cos(\pi + \theta) = 4 - 4\cos\theta$$

Por lo tanto para la curva dada no existe simetría respecto al polo.

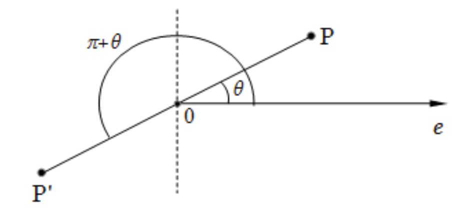


Figura 4.20.

Para continuar el estudio de la curva dada, elaboramos una tabla de valores y luego representamos gráfivamente:

θ	ρ
0	8
$\pi/6$	7.5
$\pi/4$	6.8
$\pi/3$	6
$\pi/2$	4
$3\pi/4$	1.2
π	0
$3/2\,\pi$	4

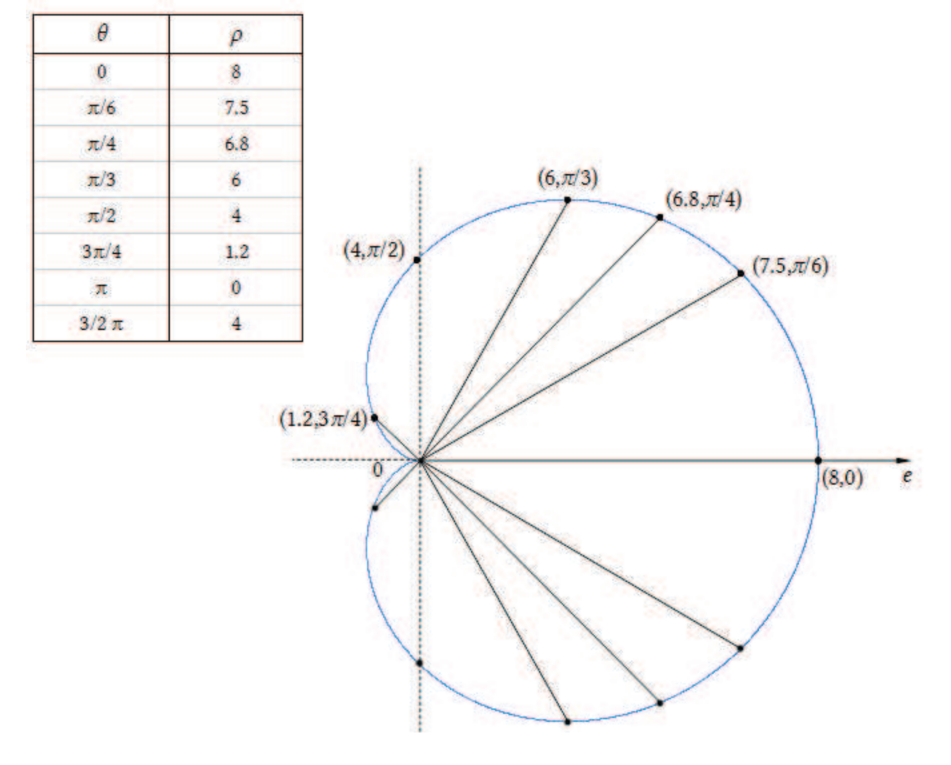


Figura 4.21.

La curva obtenida se denomina ***cardioide***. La misma es un caso particular de una familia de curvas denominada ***epicicloides***, las cuales se generan a partir de la trayectoria que sigue un punto de una circunferencia que rota sin deslizamiento sobre otra circunferencia.

4.9 ACTIVIDADES DE REPASO Y AUTOEVALUACIÓN

- Indique los elementos que caracterizan a un sistema de coordenadas polares y las relaciones entre coordenadas polares y rectangulares.
- Deduzca una expresión que le permita evaluar la distancia entre dos puntos dados en coordenadas polares. Grafique.
- Deduzca la ecuación polar de la circunferencia a partir de un sistema de coordenadas polares. Indique casos particulares de interés y grafique.
- Deduzca la ecuación polar de la recta a partir de un sistema de coordenadas polares. Particularice esa ecuación para casos de interés. Grafique.
- Deduzca la ecuación polar de las cónicas a partir de la definición general de cónicas. Estudie cómo cambia la ecuación cuando la directriz de la cónica es perpendicular y cuando es paralela respectivamente al eje polar. Grafique.
- Para las siguientes ecuaciones polares indique de qué curva se trata y represente gráficamente:
  - $\rho^2 = 24 - 2\rho cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
  - $\rho = 18cos\theta$
  - $\rho = -18sen\theta$
  - $\rho = \frac{18}{cos\theta}$
  - $\rho = -\frac{18}{sen\theta}$
  - $\rho = 8(1 + cos\theta)$
  - $\rho = \frac{10}{2-4cos\theta}$
  - $\rho = \frac{10}{2-\frac{4}{3}sen\theta}$

Capítulo 5:

Superficies



"¿Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad?"

Albert Einstein

5.1 INTRODUCCIÓN

Con lo trabajado en todos los capítulos anteriores, estamos en condiciones de abordar el estudio analítico y gráfico de las ***superficies*** en el espacio tridimensional o R^3.

Las *superficies* forman parte de la vida cotidiana. Están presentes por ejemplo en la arquitectura, configurando formas y delimitando volúmenes. Es posible hallarlas además en la mayor parte de las ramas de la ingeniería, la economía, la física, la matemática y el arte, por lo que resulta de gran importancia el conocimiento y adecuado manejo de estos lugares geométricos.

El dominio de los conceptos que se desarrollarán, permite afianzar los conocimientos adquiridos en capítulos anteriores. El trabajo de los estudiantes con las actividades diseñadas específicamente en este Capítulo, promueve la

adquisición de una sólida orientación en el espacio tridimensional y brinda las herramientas necesarias para que, por intermedio del estudio de intersecciones, de la búsqueda e identificación de trazas, secciones y curvas de nivel, accedan al estudio y reconocimiento de cualquier superficie desconocida.

5.2 SUPERFICIE ESFÉRICA

La representación gráfica de una ecuación en R^3, es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) del espacio tridimensional, cuyas coordenadas son números que satisfacen dicha ecuación.

La gráfica de una ecuación en R^3 se denomina ***superficie***. Las curvas de intersección de la superficie con los planos coordenados se denominan ***trazas***.

Iniciaremos nuestro estudio con la ***superficie esférica***.

> **Definición:** Una ***superficie esférica*** o ***esfera*** es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo llamado ***centro***. La distancia constante se denomina ***radio***.

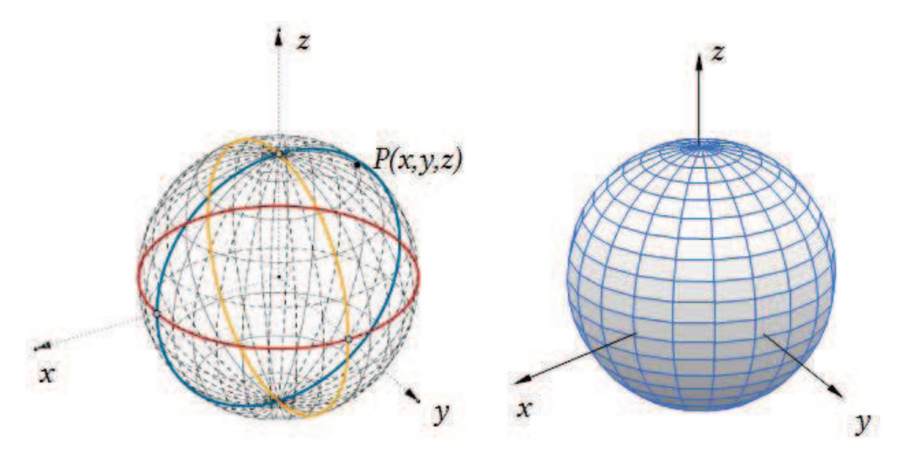


Figura 5.1.

. ECUACIÓN DE LA ESFERA DE RADIO r y CENTRO C(h, k, l).

El punto P(x, y, z) es un punto de la esfera sí y solo sí se cumple:

$$\|\boldsymbol{CP}\| = r$$

o sea:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

Desarrollando los términos de dicha ecuación y reagrupando adecuadamente, se obtiene la forma *general de la ecuación de una esfera*:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2lz + (h^2 + k^2 + l^2 - r^2) = 0$$

La representación gráfica de cualquier ecuación de segundo grado en x, y, z de la forma: $x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$ es una esfera, un punto o el conjunto vacío.

Si el centro C de la esfera se encuentra en el origen de coordenadas, la ecuación anterior resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

A partir de esta última ecuación haciendo sucesivamente x=0, y=0, z=0, obtenemos las tres curvas de intersección con los tres planos coordenados respectivamente. En este caso las tres trazas son circunferencias de radio r, con centro en el origen de coordenadas (figura 5.1)

. ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A UNA ESFERA EN UN PUNTO P_1 DE LA MISMA.

Sea la esfera de radio r y centro C(h,k,l) cuya ecuación está dada por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

Conocido un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ de la misma, se busca la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P_1. El vector que une el centro de la esfera con el punto P_1 es perpendicular al plano tangente a la esfera en dicho punto. Sus componentes son:

$\boldsymbol{CP}_1=(x_1-h, y_1-k, z_1-l)$

Teniendo en cuenta que el vector $\boldsymbol{CP}_1$ es perpendicular al plano tangente, es posible considerarlo como un vector $\boldsymbol{n}_\pi$ normal a dicho plano, y escribir la ecuación del plano de la siguiente manera:

$(x_1-h)x+(y_1-k)y+(z_1-l)z+D=0$

Considerando ahora que el punto P_1 pertenece al plano podemos obtener el valor de la constante D. Es decir:

$(x_1-h)x_1+(y_1-k)y_1+(z_1-l)z_1=-D$

Por lo tanto la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P_1 de la misma, está dada por:

$(x_1-h)x+(y_1-k)y+(z_1-l)z-[(x_1-h)x_1+(y_1-k)y_1+(z_1-l)z_1]=0$

✘ Ejercicio 5.1.

Determine la ecuación del plano π tangente a la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2-4x-6z+9=0$ en el punto $P_1(2, 2, 3)$.

✘ Respuesta Ejercicio 5.1.

El punto dato $P_1(2, 2, 3)$ pertenece a la esfera, ya que satisface la ecuación de la misma. Es decir: 4+4+9-8-18+9=0

Completando cuadrados en la ecuación de la esfera se llega a:

$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-3)^2=2^2$

Por lo tanto el centro de la esfera es C(2, 0, 3) y el vector $\boldsymbol{CP}_1$ resulta:

$\boldsymbol{CP}_1=(0, 2, 0)$

Considerando $\boldsymbol{CP}_1=\boldsymbol{n}_\pi$, la ecuación general del plano es: π: $2y+D=0$

Teniendo en cuenta que el punto P_1 pertenece al plano π, planteamos:

$4+D=0$

Por lo tanto, la ecuación del plano resulta $2y-4=0$, es decir:

π: $y=2$

5.3 SUPERFICIES CÓNICAS Y CILÍNDRICAS

En este apartado estudiaremos las superficies cónicas y cilíndricas. Ambas son casos especiales de las denominadas superficies regladas cuya definición es la siguiente:

> **Definición:** Las ***superficies regladas*** son aquellas superficies generadas por el movimiento de una *recta* en el espacio.

5.3.1 Superficies cilíndricas

> **Definición:** Se denomina ***superficie cilíndrica*** o ***cilindro***, a la superficie generada por el movimiento de una recta, que se mueve siempre paralelamente a sí misma, sobre una curva plana dada llamada ***directriz***. La recta que genera la superficie se denomina ***generatriz***.

Ecuación de la superficie cilíndrica o cilindro:

<u>Datos</u>:

$\boldsymbol{v}=(a, b, c)$	Vector paralelo a la *generatriz*
$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ z=0 \end{cases}$	Ecuación de la *directriz*

Sean (Figura 5.2):

$P(x, y, z)$ Punto genérico de la superficie

$P'(x', y', z')$ Punto de intersección de la *generatriz* con la *directriz*

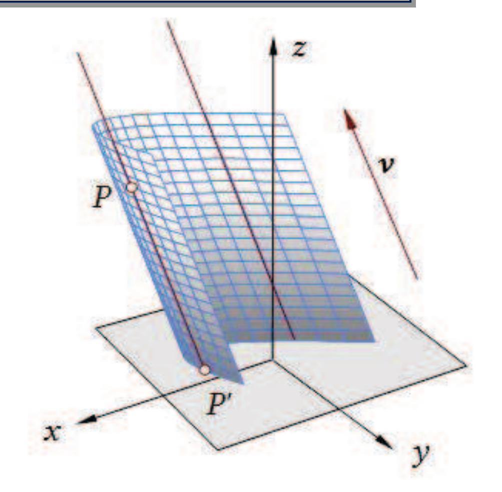


Figura 5.2.

Por el punto P' pasa una generatriz de ecuación vectorial paramétrica dada por: $\boldsymbol{PP'} = \lambda \boldsymbol{v}$, $\lambda \in R$.

Las correspondientes ecuaciones simétricas son:

$$\frac{(x-x')}{a} = \frac{(y-y')}{b} = \frac{(z-z')}{c}$$

siendo *a, b y c*, no nulos.

Como P' pertenece también a la directriz, entonces:

$$\begin{cases} f(x', y', z') = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, se sustituye z'=0 en la ecuación de la generatriz, obteniendo:

$$\frac{(x-x')}{a} = \frac{(y-y')}{b} = \frac{z}{c}$$

De la misma, surgen dos ecuaciones distintas para x' e y', las cuales reemplazadas en la ecuación de la directriz, $f(x',y',z')=0$, brinda por resultado la ecuación de la *superficie cilíndrica* buscada.

✘ Ejercicio 5.2.

Encuentre la ecuación de la *superficie cilíndrica* cuya *generatriz* es paralela al vector $\boldsymbol{v}$=(2,1,-1) y que tiene por *directriz* a la curva:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=16 \\ z=0 \end{cases}$$

✘ Respuesta Ejercicio 5.2.

Escribimos las ecuaciones simétricas de la recta *generatriz* que pasa por el punto P':

$$\frac{(x-x')}{2} = \frac{(y-y')}{1} = \frac{(z-z')}{-1}$$

Como el punto P' por definición pertenece también a la *directriz*, se cumple que:

$$\begin{cases} (x'-1)^2+(y'-2)^2=16 \\ z'=0 \end{cases}$$

Sustituyendo z'=0 en las ecuaciones simétricas de la *generatriz* y despejando x' y', obtenemos :

$$\frac{(x-x')}{2} = -z \quad \rightarrow \quad x' = x + 2z$$

$$(y-y') = -z \quad \rightarrow \quad y' = y + z$$

A continuación sustituimos estas expresiones en la ecuación de la *directriz*:

$(x+2z-1)^2+(y+z-2)^2=16$

Desarrollando la expresión anterior obtenemos la ecuación buscada:

$$x^2+y^2+5z^2+4xz+2yz-2x-4y-8z-11=0$$

5.3.2 Superficies cónicas

> **Definición:** Se denomina ***superficie cónica*** o ***cono***, a la superficie generada por el movimiento de una recta, que pasa siempre por un punto fijo llamado ***vértice*** y sobre una curva plana dada llamada ***directriz***. La recta que genera la superficie se denomina ***generatriz***.

Ecuación de la *superficie cónica* o *cono*:

<u>Datos</u>:

$V(h, k, l)$	Vértice
$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ z=0 \end{cases}$	Ecuación de la *directriz*

Sean (Figura 5.3):

P(x, y, z) Punto genérico de la superficie

P'(x', y', z') Punto de intersección de la *generatriz* con la *directriz.*

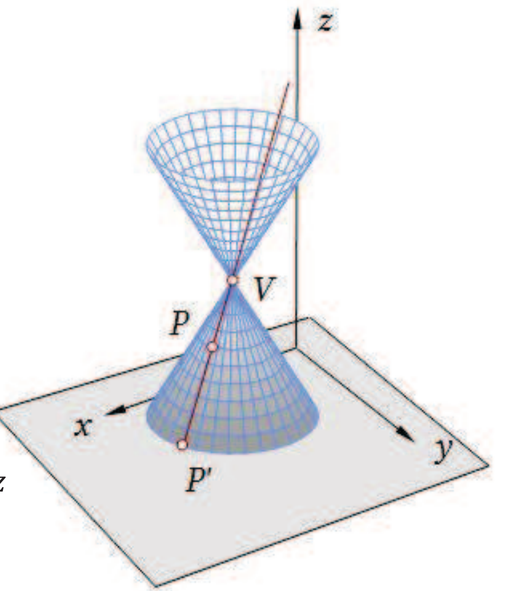


Figura 5.3.

Para obtener la ecuación de la *generatriz*, escribimos la ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por el punto V y tiene como vector director a ***VP'***:

VP = λ ***VP'***, $\lambda \in R$.

En términos de las componentes de los vectores ***VP*** y ***VP'*** esta ecuación resulta:

$(x-h, y-k, z-l)=\lambda(x'-h, y'-k, z'-l)\;\; \lambda \in R$.

Eliminando el parámetro λ, obtenemos:

$$\frac{x-h}{x'-h}=\frac{y-k}{y'-k}=\frac{z-l}{z'-l}$$

Estas son las ecuaciones simétricas de la *generatriz* de la *superficie cónica*.

Como el punto P' también pertenece a la *directriz*, entonces:

$$\begin{cases} f(x', y', z')=0 \\ z'=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, se sustituye z'=0 en la ecuación de la *generatriz*, obteniendo:

$$\frac{x-h}{x'-h}=\frac{y-k}{y'-k}=\frac{z-l}{0-l}$$

De la misma, surgen dos ecuaciones distintas para las variables x' e y', las cuales reemplazadas en la ecuación de la *directriz*, $f\,(x', y', z') = 0$, permiten obtener la ecuación de la *superficie cónica* buscada.

✘ Ejercicio 5.3.

Encuentre la ecuación de la *superficie cónica* que tiene como *vértice* el punto V(0,1,3) y *directriz* a la curva:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases}$$

✘ Respuesta Ejercicio 5.3.

A partir de las ecuaciones simétricas de una de las generatrices:

$$\frac{x-h}{x'-h}=\frac{y-k}{y'-k}=\frac{z-l}{0-l}$$

Sustituimos las coordenadas del vértice dato:

$$\frac{x}{x'}=\frac{y-1}{y'-1}=\frac{z-3}{z'-3}$$

Como el punto P' pertenece también a la *directriz*, se cumple que:

$$\begin{cases} x'^2+y^2=9 \\ z'=0 \end{cases}$$

Sustituyendo z'=0 en la ecuación de la *generatriz* y despejando resulta:

$$\frac{x}{x'}=\frac{z-3}{-3} \quad \rightarrow \quad x'=\frac{-3x}{z-3}$$

$$\frac{y-1}{y'-1}=\frac{z-3}{-3} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{(-3)(y-1)}{z-3}+1$$

A continuación sustituimos estas expresiones en la ecuación de la *directriz*:

$$\frac{(-3x)^2}{(z-3)^2}+\left[(-3)\frac{y-1}{z-3}+1\right]^2=9$$

Desarrollando la expresión anterior obtenemos la ecuación buscada:

$$9x^2+9y^2-8z^2-6yz+54z-81=0$$

5.3.3 Algunos casos particulares de superficies cónicas y superficies cilíndricas rectas.

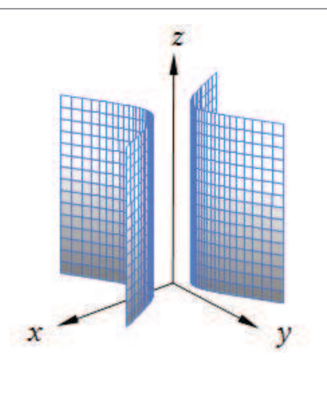
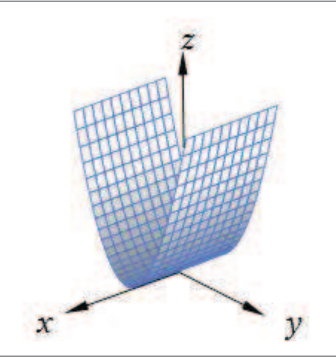
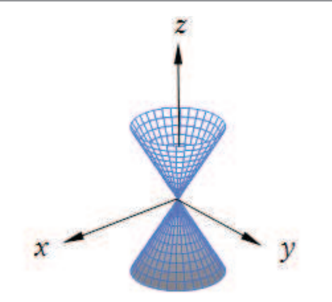
Nombre - Ecuación	Representación gráfica	Observaciones
Cilindro elíptico recto $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \forall z \in R$		*Directriz*: Elipse en el plano *xy* *Generatriz*: paralela al eje *z*
Cilindro hiperbólico recto $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \forall z \in R$		*Directriz*: Hipérbola en el plano *xy* *Generatriz*: paralela al eje *z*
Cilindro parabólico recto $y^2 = 2pz \qquad \forall x \in R$		*Directriz*: Parábola en el plano *yz* *Generatriz*: paralela al eje *x*
Cono elíptico recto $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		*Directriz*: Elipse paralela al plano *xy* *Generatriz*: pasa por el origen de coordenadas

Tabla 5.1.

En la Tabla 5.1, es posible observar la denominación que recibe cada una de estas superficies, las ecuaciones de las mismas, sus representaciones gráficas y algunas particularidades de la generatriz y de la directriz para cada uno de los casos presentados.

5.4 SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

5.4.1 Coordenadas cilíndricas

Dados tres ejes ortogonales *x*, *y*, *z* de origen O, se definen las coordenadas cilíndricas de la siguiente manera:

> **Definición:** Se denominan ***coordenadas cilíndricas*** de un punto P del espacio, a la terna (ρ, θ, z), donde ρ y θ son las coordenadas polares de la proyección ortogonal del punto P sobre el plano *xy* (plano polar), y *z* es la tercera coordenada cartesiana de P.

$0 \leq \rho < +\infty$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$-\infty < z < +\infty$

Figura 5.4.

El nombre *coordenadas cilíndricas* se debe al hecho que la gráfica de $\rho=c$ es un *cilindro circular recto*.

. RELACIONES ENTRE COORDENADAS CILÍNDRICAS Y COORDENADAS CARTESIANAS.

$$x = \rho cos\theta \quad \rightarrow \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$y = \rho sen\theta \quad \rightarrow \quad tg\theta = \frac{y}{x}\ ; \quad x \neq 0$$

$$z = z \quad \rightarrow \quad z = z$$

Las coordenadas cilíndricas se utilizan con frecuencia en aquellos problemas en los que existe un *eje de simetría.*

5.4.2 Coordenadas esféricas

En un sistema coordenado esférico hay un ***plano polar*** y un eje perpendicular a dicho plano, con el origen del eje z en el ***polo*** de ese plano.

> **Definición:** Las ***coordenadas esféricas*** de un punto P del espacio, es la terna de números (ρ, θ, φ), donde ρ es la distancia del origen de coordenadas al punto P, θ es la medida en radianes del ángulo polar de la proyección de P en el *plano polar* y φ es la medida en radianes, no negativa, del ángulo más pequeño medido desde el semieje positivo z a la semirrecta OP.

$0 \leq \rho < +\infty$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

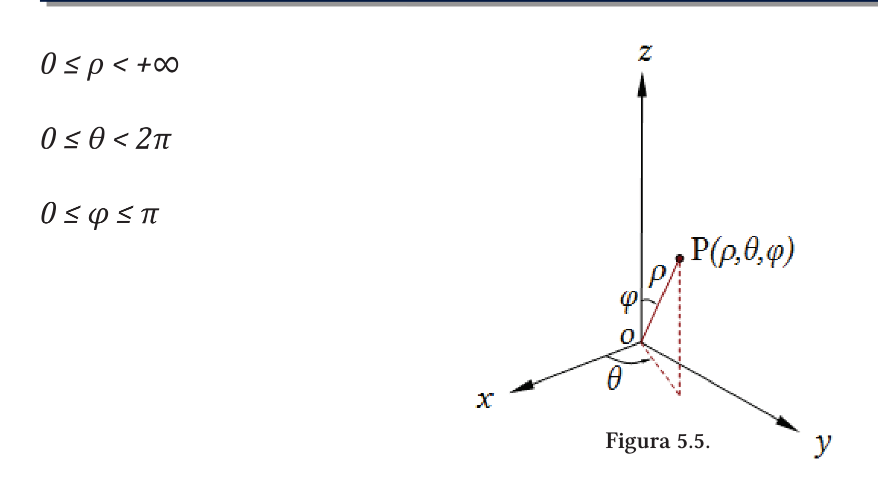


Figura 5.5.

La designación de *coordenadas esféricas* se debe al hecho que la gráfica de ρ=c es una esfera. Las coordenadas esféricas se utilizan con frecuencia en aquellos problemas en los que existe un punto que es un centro de simetría.

. RELACIONES ENTRE COORDENADAS ESFÉRICAS Y COORDENADAS CARTESIANAS.

A partir de lo indicado en la Figura 5.6, escribimos:

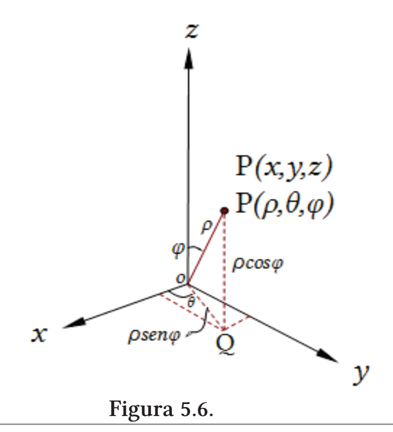


Figura 5.6.

$x=|OQ|\cos\theta=\rho\ sen\varphi\ \cos\theta$
$y=|OQ|sen\theta=\rho\ sen\varphi\ sen\theta$
$z=|QP|=\rho\cos\varphi$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores y sumando, obtenemos:

$x^2+y^2+z^2 = \rho^2[sen^2\varphi\ (\cos^2\theta+sen^2\theta) + \cos^2\varphi]$

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

Esta expresión nos permite evaluar ρ a partir de las coordenadas x,y,z. Para obtener φ en función también de dichas coordenadas, elevamos al cuadrado las expresiones correspondientes a x e y, y luego sumamos miembro a miembro. Ordenando términos, llegamos a:

$x^2+y^2 = \rho^2\ sen^2\varphi\ (\cos^2\theta+sen^2\theta)$

Es decir:

$x^2+y^2 = \rho^2\ sen^2\varphi$

Dividiendo ambos miembros por z^2:

$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=\frac{\rho^2\ sen^2\varphi}{z^2}$$

Y considerando en el segundo miembro que $z^2 = \rho^2 \cos^2\varphi$, resulta:

$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=\frac{sen^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=tg^2\varphi$$

✘ Ejercicio 5.4.

Dada la ecuación en *coordenadas cilíndricas*: $\rho(3\cos\theta + 2\ sen\ \theta) + 6z = 0$

- Obtenga la ecuación en *coordenadas cartesianas*.
- Obtenga la ecuación en *coordenadas esféricas*.

✘ Respuesta Ejercicio 5.4.

- En *coordenadas cartesianas* tendremos:

  $3\rho\cos\theta + 2\rho\ sen\ \theta + 6z = 0$
  $3x + 2y + 6z = 0$
  Es la ecuación de un plano que pasa por el origen de coordenadas.

- En *coordenadas esféricas* tendremos:

  $3\rho\ sen\varphi\ \cos\theta + 2\ \rho sen\varphi\ sen\theta + 6\rho\cos\varphi = 0$

✘ Ejercicio 5.5.

Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas cilíndricas*, donde c es una constante.

✘ Respuesta Ejercicio 5.5.

a) $\boxed{\rho=c}$

La gráfica es un *cilindro circular recto* que tiene radio c y el eje z como eje.

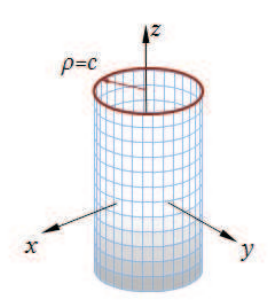


Figura 5.7.

En este caso, θ y z pueden tomar cualquier valor y ρ es una constante.

b) $\boxed{\theta=c}$

La gráfica es un *semiplano* que contiene al eje z. ρ y z pueden tomar cualquier valor y θ es constante.

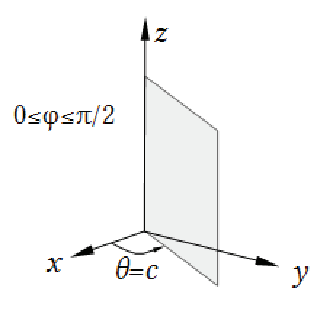


Figura 5.8.

c) $\boxed{z=c}$

En este caso la gráfica es un *plano* paralelo al plano polar, ubicado a una distancia de c unidades de él y z es una constante.

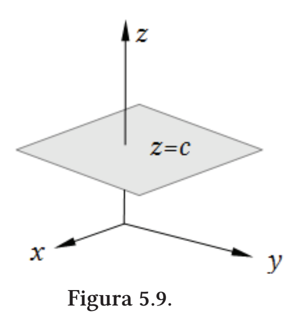


Figura 5.9.

✘ Ejercicio 5.6.

Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas esféricas*, donde c es una constante.

✘ Respuesta Ejercicio 5.6.

a) $\rho=c$

La gráfica es una *esfera* de radio c y tiene su centro en el polo.

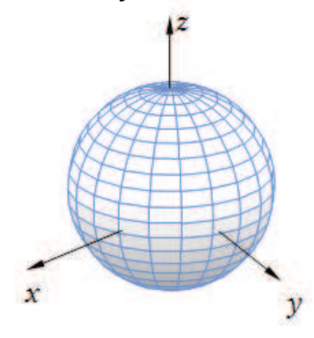


Figura 5.10.

b) $\theta=c$

La gráfica es un *semiplano* que contiene al eje z y se obtiene haciendo girar alrededor del eje z, en un ángulo de c radianes, el semiplano xz para el cual $x\geq 0$. ρ puede ser cualquier número no negativo, φ puede ser cualquier número en el intervalo cerrado $[0,\pi]$ y θ es una constante.

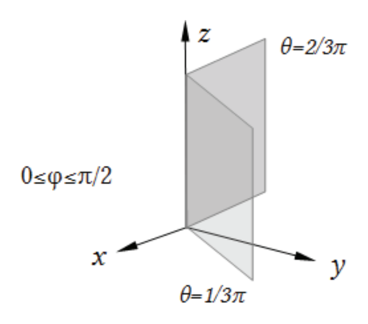


Figura 5.11.

En la Figura 5.11 se muestran croquis de los semiplanos para $\theta=1/3\,\pi$ y $\theta=2/3\,\pi$.

c) $\varphi=c$

En este caso, la gráfica es la mitad de un *cono* que tiene su vértice en el origen de coordenadas y como eje al eje z. La Figura 5.12 muestra la representación de medio cono para: $0 < c < \pi/2$

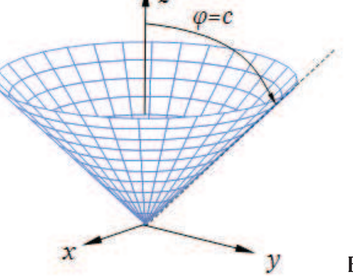


Figura 5.12.

5.5 SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

> **Definición:** Una ***superficie de revolución*** es aquella generada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de la curva.

La curva plana se denomina ***generatriz***, y la recta fija, ***eje de revolución*** o ***eje de rotación***. Cualquier posición de la generatriz se denomina ***meridiano*** y cada circunferencia descripta por un punto de la superficie se llama ***paralelo***. En la Figura 5.13, es posible observar los elementos mencionados.

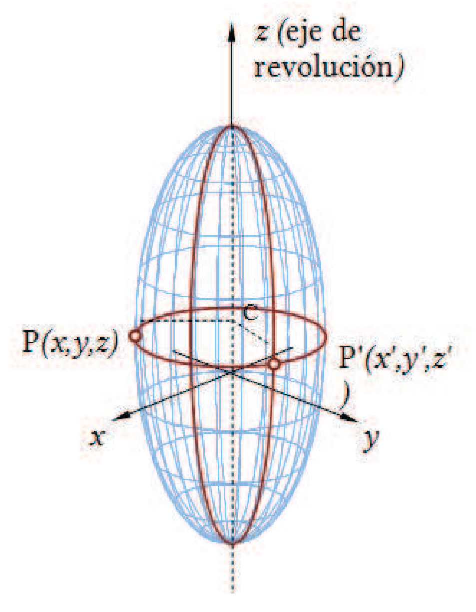


Figura 5.13.

. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN.

Conocidos el eje de revolución y la curva generatriz, determinaremos la ecuación de la superficie de revolución. Consideraremos los siguientes datos:

> Datos:
>
> Ecuación de la *generatriz*:
>
> $$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
>
> *Eje de revolución*: Eje z

Sean:

$P(x, y, z)$ Punto genérico de la superficie

$P'(x', y', z')$ Punto de intersección del paralelo correspondiente a $P(x,y,z)$ con la generatriz.

El centro del paralelo es : $C(0,0,z)$

Evaluamos los módulos de los vectores $\boldsymbol{PC}$ y $\boldsymbol{P'C}$:

$$\|\boldsymbol{PC}\|^2 = (0-x)^2 + (0-y)^2 + (z-z)^2$$
$$\|\boldsymbol{P'C}\|^2 = (0-x')^2 + (0-y')^2 + (z-z')^2$$

Pero como: $\|\boldsymbol{P'C}\|^2 = \|\boldsymbol{PC}\|^2$, igualando ambas expresiones obtenemos:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 + (z-z')^2$$

El punto *P'* pertenece a la *generatriz*, es decir, cumple con la ecuación:

$$\begin{cases} f(x', y', z') = 0 & \textit{Ecuación de la generatriz} \\ y' = 0 \end{cases}$$

Además: $z'=z$
Reemplazando $y'=0$ y $z'=z$ en la expresión

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 + (z-z')^2$$

resulta: $x^2 + y^2 = x'^2$

$$x' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo la expresión anterior en $f(x', y', z') = 0$, obtenemos la ecuación de la *superficie de revolución* buscada:

$$\boxed{f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z\right) = 0}$$

Dado que se conserva la función correspondiente a la *curva generatriz*, es posible obtener la ecuación de una *superficie de revolución*, sustituyendo en la ecuación de la *curva generatriz* la variable que no corresponde ni al *eje de revolución* ni a la variable que se anula en el plano de la *generatriz*, por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables no medidas a lo largo del *eje de rotación*.

✘ Ejercicio 5.7.

Determine la ecuación de la *superficie de revolución*, cuya *curva generatriz* es:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Y el *eje de revolución* es el eje *z.*

✘ Respuesta Ejercicio 5.7.

Para obtener la ecuación de la superficie, observamos que la variable que no corresponde ni al eje de revolución ni a la variable que se anula en el plano de la generatriz, es *x*. Entonces ésta se sustituye por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables no medidas a lo largo del eje de rotación: $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Operando adecuadamente obtenemos la ecuación de un *elipsoide de revolución*:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que la misma superficie puede ser generada por la rotación de la elipse $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, con x=0 alrededor del eje z.

✘ Ejercicio 5.8

Determine la ecuación de la *superficie de revolución*, cuya *curva generatriz* es:

$$\begin{cases} y^2=6x \\ z=0 \end{cases}$$

Y el *eje de revolución* es el eje x.

✘ Respuesta Ejercicio 5.8.

Para obtener la ecuación de la superficie, observamos que la variable que no corresponde ni al eje de revolución ni a la variable que se anula en el plano de la generatriz, es y. Entonces ésta se sustituye por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables no medidas a lo largo del eje de rotación, es decir: $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Resulta entonces:

$$\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=6x$$

Operando adecuadamente obtenemos la ecuación de un *paraboloide de revolución*:

$$y^2+z^2=6x$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que la misma superficie puede ser generada por la rotación de la parábola $z^2=6x$, con y=0, alrededor del eje x.

5.6 ANÁLISIS DE LA SIMETRÍA

Antes de iniciar el estudio de las superficies cuádricas, revisaremos los conceptos de simetría.

5.6.1 Simetría con respecto a los planos coordenados

- Si una ecuación no se altera cuando la variable x se reemplaza por $-x$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al plano yz.
- Si una ecuación no se altera cuando la variable y se reemplaza por $-y$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al plano xz.

- Si una ecuación no se altera cuando la variable z se reemplaza por $-z$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al plano xy.

5.6.2 Simetría con respecto a los ejes coordenados

- Si una ecuación no se altera cuando las variables x e y, se reemplazan por $-x$ y $-y$ respectivamente, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje z.
- Si una ecuación no se altera cuando las variables x y z, se reemplazan por $-x$ y $-z$ respectivamente, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y.
- Si una ecuación no se altera cuando las variables y y z, se reemplazan por $-y$ y $-z$ respectivamente, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.

5.6.3 Simetría con respecto al origen de coordenadas

La condición necesaria y suficiente para que una superficie sea simétrica con respecto al origen de coordenadas, es que no se altere su ecuación al cambiar los signos de las tres variables x, y y z.

5.7 SUPERFICIES CUÁDRICAS

5.7.1 Cuádricas con centro

Las ***superficies cuádricas con centro*** tienen tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría, llamado el *centro* de la superficie.

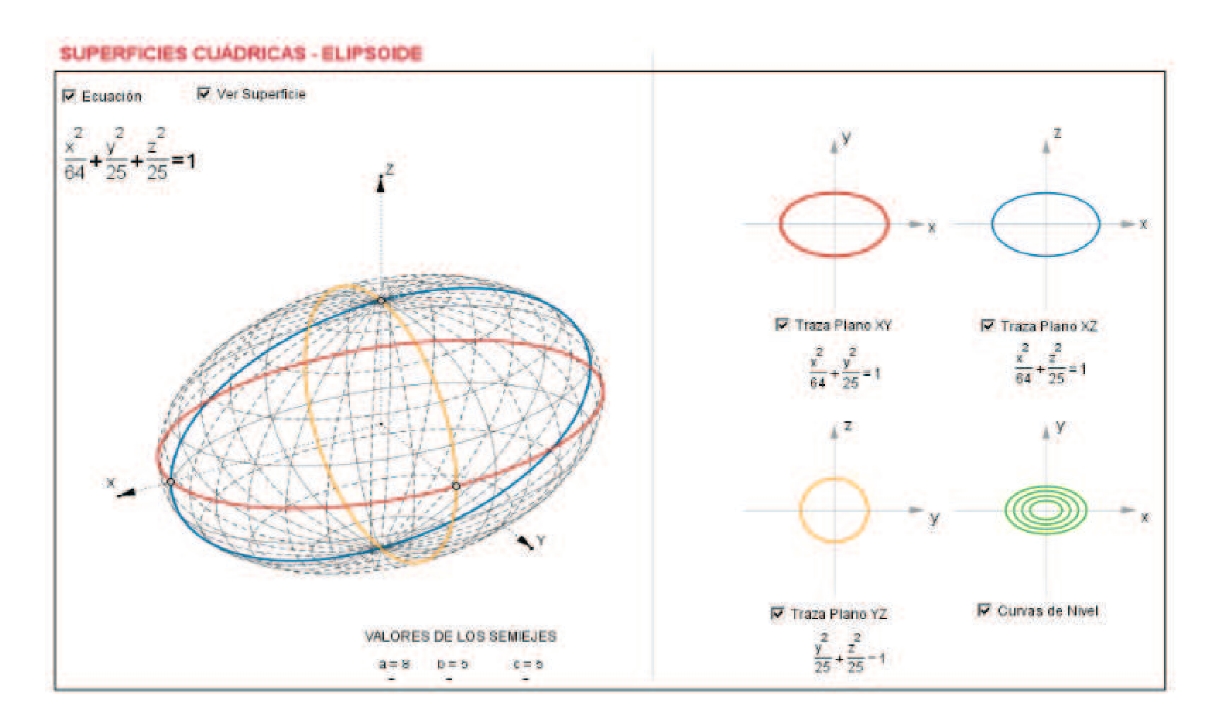
. ELIPSOIDE

La ecuación del ***elipsoide*** de centro C(0, 0, 0) y semiejes a, b, c positivos, está dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Figura 5.14.

Ejemplo:



Observaciones:

- La superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados.
- Las trazas de la superficie sobre los planos *xy, xz e yz* son *elipses*.
- Las secciones realizadas con planos paralelos al plano *xy* (*z*=*k*) están dadas por: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$
- Se observa que las secciones elípticas decrecen conforme aumenta el valor de *k*. Si *k*=*c*, la sección es el punto de coordenadas (0,0,*c*).
- Si dos de los semiejes son iguales, la traza correspondiente a esos valores resulta una circunferencia, por lo cual el elipsoide en este caso es un *elipsoide de revolución*

. HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

La ecuación del ***hiperboloide de una hoja*** con centro en el origen de coordenadas, con semiejes *a*, *b* y *c* positivos y el eje *z* como eje de la superficie está dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

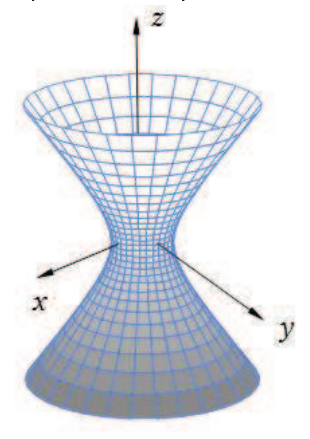
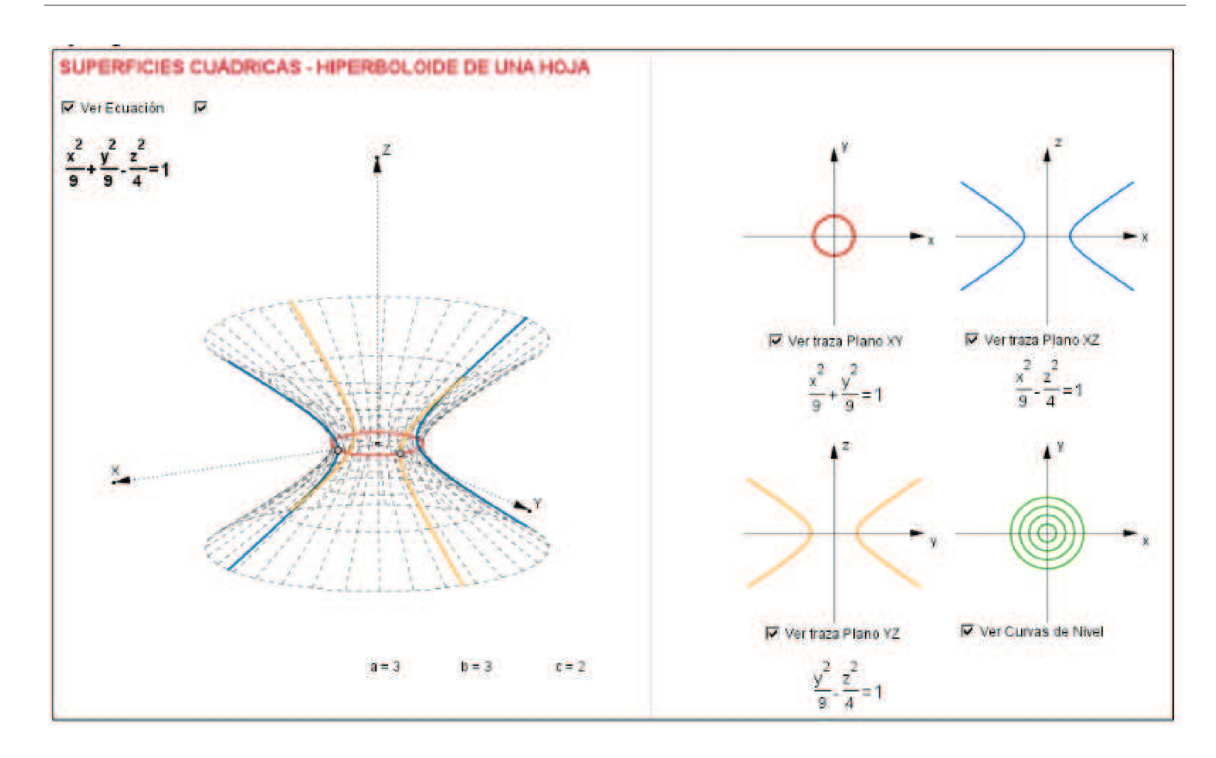


Figura 5.15.

Ejemplo:



<u>Observaciones</u>:

- La superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados.
- La traza sobre el plano *xy es una* elipse y sobre los planos *xz* e *yz* son hipérbolas.
- Las secciones realizadas con planos paralelos al plano *xy* ($z=k$) están dadas por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$
- Se observa que las secciones elípticas crecen conforme aumenta el valor de k.
- Si los semiejes a y b son iguales, la traza sobre el plano *xy* resulta una circunferencia, por lo cual el hiperboloide es un *hiperboloide de una hoja de revolución,* con eje de revolución el eje z.

. HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

La ecuación del ***hiperboloide de dos hojas*** con centro en el origen de coordenadas, y el eje z como eje de la superficie, con a, b y c positivos, está dada por:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

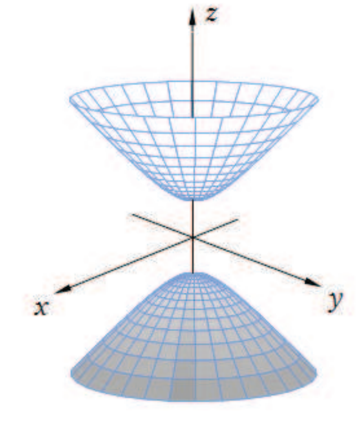
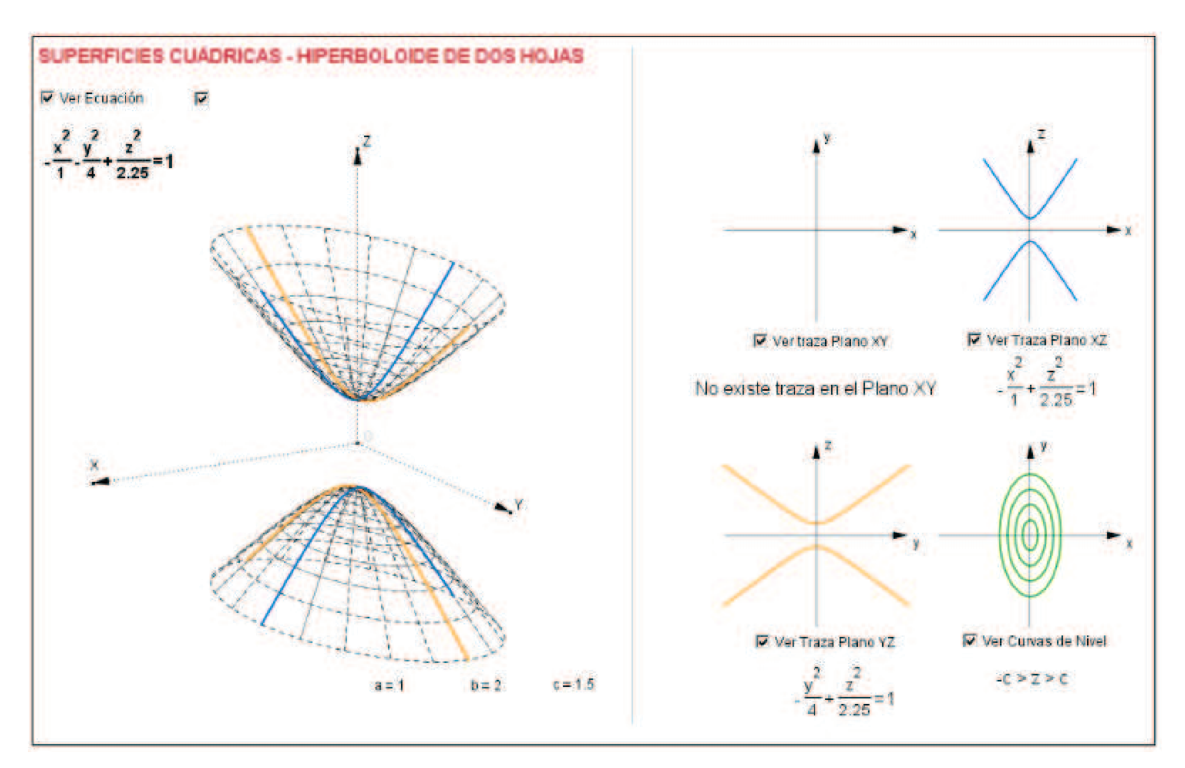


Figura 5.16.

Ejemplo:



Observaciones:

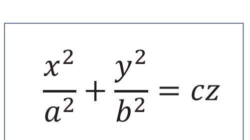
- La superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados.
- La traza de la superficie sobre el plano *xy* no existe y sobre los planos *xz* e *yz* son hipérbolas.
- Las secciones realizadas con planos paralelos al plano *xy* ($z=k$) están dadas por : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{k^2}{c^2}$
- Se observa que de acuerdo al valor de k, las secciones son elipses (para $k > c$ y $k < -c$), un punto ($k=c$, $k=-c$) o no existen ($-c < k < c$).
- Si los semiejes a y b son iguales las secciones correspondientes con planos paralelos al plano *xy* son circunferencias, por lo cual el hiperboloide es un *hiperboloide de dos hojas de revolución,* con eje de revolución el eje *z.*

5.7.2 Cuádricas sin centro

Las *superficies cuádricas sin centro* tienen dos planos de simetría, un eje de simetría y no poseen centro de simetría. Estas son el *paraboloide elíptico* y el *paraboloide hiperbólico*, que describiremos a continuación.

. PARABOLOIDE ELÍPTICO

La ecuación de un ***paraboloide elíptico*** con vértice en el origen de coordenadas, y el eje z como eje de la superficie, con a, b y c positivos, está dada por:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

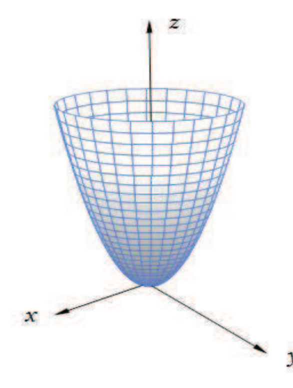
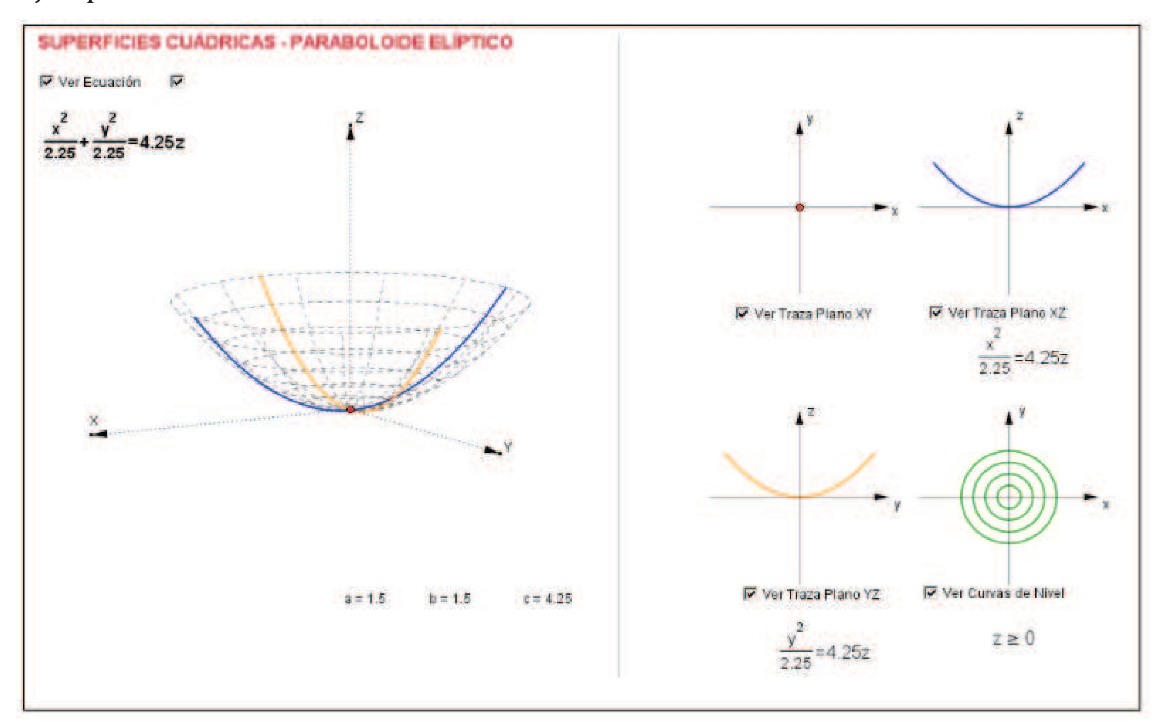


Figura 5.17.

Ejemplo:

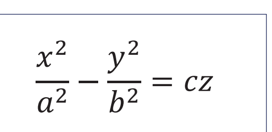


<u>Observaciones</u>:

- La superficie es simétrica con respecto a dos planos coordenados: plano xz y plano yz.
- La traza sobre el plano xy es el origen de coordenadas y sobre los planos xz e yz son parábolas.
- Las secciones realizadas con planos paralelos al plano xy (z=k) están dadas por : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck$
- Se observa que de acuerdo al valor de k, las secciones son elipses cuyos semiejes crecen a medida que aumenta el valor de k, para $k>0$.
- Si los semiejes a y b son iguales las secciones correspondientes con planos paralelos al plano xy (z=k con k>0) son circunferencias, por lo cual el paraboloide es un *paraboloide de revolución,* con eje de revolución el eje z.

. PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

La ecuación de un ***paraboloide hiperbólico*** en su posición estándar o canónica, con a, b y c positivos, está dada por:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

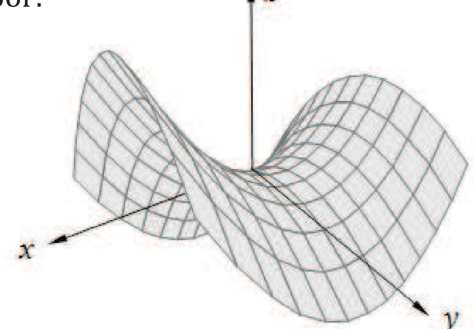
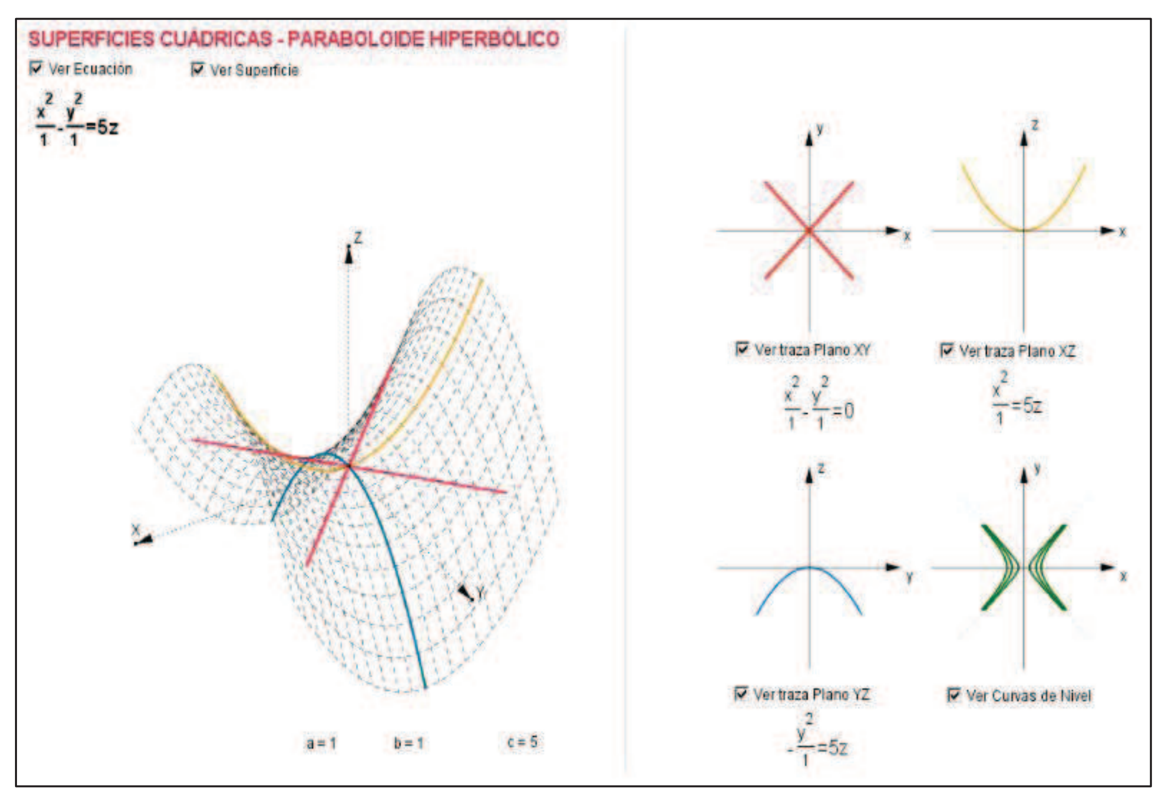


Figura 5.18.

Ejemplo:



Observaciones:

- La superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados yz y xz.
- La traza sobre el plano xy está dada por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, es decir un par de rectas.
- Las secciones realizadas con planos paralelos al plano xy ($z=k$) están dadas por : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck$
- Se observa que de acuerdo al valor de k, las secciones con planos paralelos al plano xy son hipérbolas con el eje focal paralelo al eje x o paralelo al eje y, de acuerdo al signo de k.
- Las trazas sobre los planos xz e yz, son parábolas.

5.7.3 Ecuaciones paramétricas de superficies

Las ecuaciones paramétricas de una superficie están dadas por funciones continuas *f*, *g*, *h* y parámetros *s*, *t*, tales que los puntos (*x*, *y*, *z*) de la superficie se pueden expresar en la forma:

$$\begin{cases} x = f(s,t) \\ y = g(s,t) \\ z = h(s,t) \end{cases}$$

siendo el dominio de variación de los parámetros *s*, *t*, sendos intervalos de *R*:
$s_0 \leq s \leq s_1$ y $t_0 \leq t \leq t_1$.

. ESFERA

La ecuación de la *superficie esférica* de centro C(0, 0, 0) y radio r, está dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Entonces, las coordenadas de los puntos de la esfera pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = rsen\alpha\ cos\beta \\ y = rsen\alpha\ sen\beta \\ z = rcos\alpha \end{cases} \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi$$

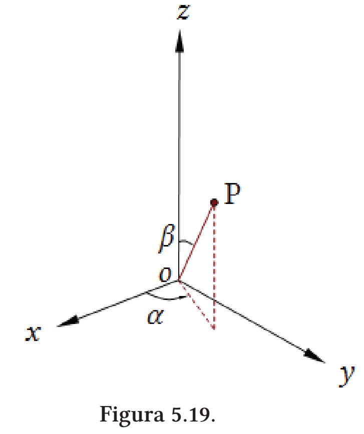


Figura 5.19.

Elevando al cuadrado ambos miembros de las tres ecuaciones y sumando miembro a miembro, se eliminan los parámetros α y β y se verifica la ecuación inicial.

. ELIPSOIDE

La ecuación del *elipsoide* de centro C(0, 0, 0) y semiejes *a*, *b*, *c* positivos, está dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Una posible parametrización, está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} x = a\ cos\alpha\ sen\beta \\ y = b\ sen\alpha\ sen\beta \\ z = c\ cos\beta \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi] \quad ; \quad \beta \in [0, \pi]$$

Es posible verificar la ecuación original, eliminando los parámetros α y β con el mismo procedimiento indicado para el caso de la superficie esférica.

. HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

La ecuación del *hiperboloide de una hoja* con centro en el origen de coordenadas, está dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Con a, b y c positivos y el eje z como eje de la superficie. Las coordenadas de los puntos del hiperboloide de una hoja pueden escribirse del siguiente modo:

$$\begin{cases} x = a\ cos\alpha\ ch\beta \\ y = b\ sen\alpha\ ch\beta \\ z = c\ sh\beta \end{cases} \qquad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad ; \quad -\infty < \beta < \infty$$

. HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

La ecuación del *hiperboloide de dos hojas* con centro en el origen de coordenadas, y el eje z como eje de la superficie, está dada por:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Con a, b y c positivos. Una posible parametrización es la siguiente:

$$\begin{cases} x = a\ cos\alpha\ sh\beta \\ y = b\ sen\alpha\ sh\beta \\ z = \pm c\ ch\beta \end{cases} \qquad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad ; \quad -\infty < \beta < \infty$$

. PARABOLOIDE ELÍPTICO

Sea la ecuación de un *paraboloide elíptico*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Con a y b mayores que 0. Las coordenadas de los puntos de dicha superficie pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = a\ t\ cos\alpha \\ y = b\ t\ sen\alpha \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \geq 0 \quad ; \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

. PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Sea la ecuación de un *paraboloide hiperbólico*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

Con a y b mayores que 0. Las coordenadas de los puntos de dicha superficie pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = a\,t\,ch\beta \\ y = b\,t\,sh\beta \qquad\qquad t \geq 0 \quad ; \quad \beta \in R \\ z = t^2 \end{cases}$$

5.7.4 Aplicaciones prácticas de las superficies

Existen numerosas aplicaciones prácticas de las superficies geométricas tridimensionales en diversos ámbitos y variadas disciplinas. Las ciencias aplicadas, la ingeniería y la arquitectura por ejemplo, aprovechan las propiedades de superficies geométricas, utilizando las mismas en forma cotidiana para la solución de problemas reales y concretos de dichas disciplinas.

Un importante ejemplo de lo mencionado está constituido por las denominadas láminas delgadas, las cuales son estructuras sumamente eficientes para resistir esfuerzos del tipo membranal. Las mismas generalmente se construyen en hormigón armado, acero, aluminio, vidrio laminado o materiales compuestos y poseen diversas utilidades en el ámbito de la arquitectura e ingeniería tales como:

- Materialización de grandes *espacios cubiertos* destinados principalmente a edificios habitacionales, naves industriales, complejos culturales, complejos deportivos y centros comerciales, entre otros. Las superficies geométricas tridimensionales, en estos casos se combinan entre sí, delimitando volúmenes, que cumplen un fin específico y que generan edificaciones de elevado nivel estético y gran valor arquitectónico.
- Construcción de *recipientes* para almacenamiento de líquidos o sólidos: dichos recipientes son principalmente construidos de forma *esférica, cilíndrica* o combinaciones de ellas y generalmente forman parte de silos, tanques y depósitos ubicados en instalaciones industriales, comerciales y productivas.
- Construcción de recipientes sometidos a *presiones*. Los mismos son estructuras o dispositivos que trabajan bajo la acción de presiones internas o externas generalmente debida a gases o líquidos. Se utilizan ampliamente en la industria química y petroquímica, pero también es posible ubicar en esta clasificación los cascos de submarinos y tuberías sumergidas, por citar algunos.
- Construcción de *torres* de *enfriamiento*. Dichas estructuras son construidas en hormigón armado o acero y poseen una forma geométrica representada por un hiperboloide de revolución. Las mismas poseen grandes dimensiones y se

ubican generalmente en industrias petroquímicas, centrales térmicas de generación de energía eléctrica y en centrales nucleares.

- Construcción de *edificios* principales de una central nuclear. Es posible encontrar generalmente en dichas edificaciones, cáscaras de hormigón pretensado que conforman la estructura exterior. Dichas estructuras surgen de la combinación de un cilindro y un casquete esférico o de un cilindro con una semiesfera.
- Construcción de *pilares* de acero de plataformas petroleras costa afuera. Generalmente las mencionadas estructuras se materializan a partir de la utilización de grandes cilindros de acero (de 5m de diámetro o más), los cuales conforman la estructura de sostén de la superestructura de operación de la plataforma.
- Construcción de *fuselajes* de aeronaves de diversos tipos, cascos de embarcaciones marinas y carrocerías de vehículos terrestres de diversas características. Las mismas se diseñan según el tipo de vehículo para el cual están destinadas y de acuerdo a las leyes de la hidrodinámica y la aerodinámica. Dichas superficies en general están compuestas por una combinación de superficies más simples, a partir de las cuales se logra una superficie de alta complejidad que posee las propiedades adecuadas para cumplir la función para la que han sido proyectadas.

5.8 ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON DOS Y TRES VARIABLES

5.8.1 Ecuaciones de segundo grado con dos variables

Una ecuación cuadrática completa en R^2 tiene la forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Donde los coeficientes a, b, c, d, e, f, son números reales, y al menos uno de los coeficientes a, b o c, es distinto de cero.

La expresión: $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se denomina ***forma cuadrática asociada***.

Las formas cuadráticas surgen en muchas aplicaciones, en economía, mecánica, estadística, geometría entre otras. Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas en las variables x e y se llaman *cónicas* o *secciones cónicas*. Las circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas se denominan *cónicas no degeneradas*.

Las cónicas restantes tales como puntos y pares de rectas se clasifican como *cónicas degeneradas*. Una cónica no degenerada se encuentra en la denominada *posición estándar* o *canónica* con respecto a los ejes coordenados, si su ecuación se puede expresar en alguna de las formas dadas en la Tabla 5.2.:

Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Parábola	$y = x^2$	
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	

Tabla 5.2.

Observamos que ninguna cónica en *posición estándar* tiene en su ecuación, términos en (xy), $(x^2 ; x)$, o $(y^2 ; y)$.

Dada la ecuación cuadrática $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ queremos identificar de qué cónica se trata. Para ello, buscamos un nuevo sistema de coordenadas respecto del cual la cónica esté en su posición normal o estándar.

- Si aparecen términos en $(x^2 – x)$ y/o $(y^2 – y)$, indican que la cónica está *trasladada* respecto a su posición *normal* o *estándar*.
- Si aparece el término (xy), indica que la cónica está *girada* respecto a su posición *normal* o *estándar*.
- Si aparecen términos en $(x^2 – x)$ y/o $(y^2 – y)$ y también aparece el término (xy), la cónica está *girada y trasladada* respecto a su posición *normal* o *estándar*.

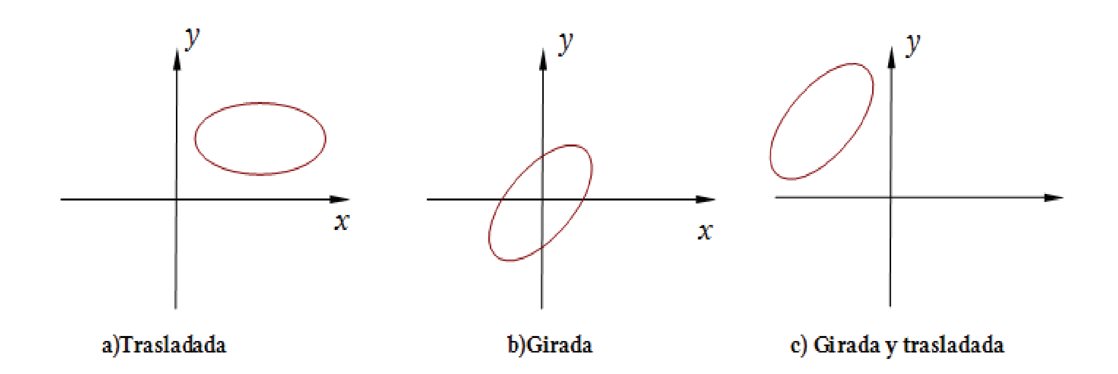


Figura 5.20.

5.8.1.1 Análisis de la ecuación cuadrática

Una técnica para identificar la gráfica de una cónica, que no se encuentra en la *posición normal* o *estándar* consiste en *girar y trasladar los ejes coordenados* para obtener un nuevo sistema de coordenadas respecto al cual la cónica esté en su *posición normal* o *posición estándar*.

. TRASLACIÓN

Dada la ecuación cuadrática en dos variables x e y: $ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$

- Agrupamos todos los términos en x y todos los términos en y.
- Hacemos que los términos en x^2 e y^2 tengan coeficientes igual a 1.
- Completamos cuadrados en cada paréntesis.

✘ Ejercicio 5.9.

Determine la expresión de la cónica de ecuación $3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$, con respecto a un nuevo sistema de coordenadas obtenido por traslación. Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 5.9.

Dada la ecuación cuadrática: $3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$

a) Agrupamos todos los términos en la variable x y todos los términos en la variable y.

$(3x^2-12x)+(4y^2-8y)+4=0$

b) Hacemos que x^2 y y^2 tengan coeficientes igual a 1:

$3(x^2-4x)+4(y^2-2y)+4=0$

c) Completamos cuadrados en cada paréntesis:

$3(x^2-4x+4-4)+4(y^2-2y+1-1)+4=0$

$3(x-2)^2-12+4(y-1)^2-4+4=0$

$3x'^2+4y'^2=12$

$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{3}=1$

$a^2=4$

$b^2=3$

$a^2-c^2=b^2$

$c^2=1$

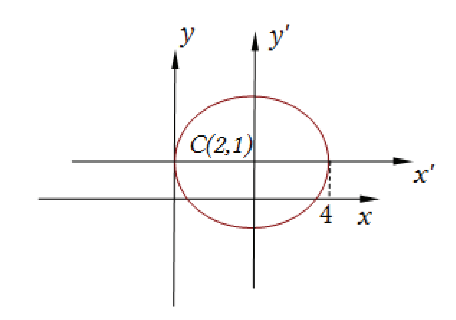


Figura 5.21.

Las ecuaciones de traslación son en este caso:

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-1 \end{cases} \qquad C(2, 1)$$

. ROTACIÓN

Dada la ecuación cuadrática completa en dos variables *x* e *y*:

$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

La misma puede escribirse en una forma matricial equivalente a la expresión anterior, de la siguiente manera:

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Designando:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{K} = [d \quad e]$$

la forma matricial queda escrita como sigue:

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{KX} + f = 0$$

Siendo ***A*** una matriz *simétrica*, ***A*** es ***ortogonalmente diagonalizable***.

Es decir, existe una matriz ***P*** tal que:

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$$

Donde la matriz diagonal ***D*** está dada por:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Siendo los elementos de la diagonal principal, $\lambda_1 y \; \lambda_2$, los *valores propios* de ***A***.

La matriz ***P*** tiene por columnas los vectores propios $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ de la matriz ***A*** normalizados. Es decir:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ *vectores propios normalizados* de ***A***;

$$\|\boldsymbol{b}_1\| = \|\boldsymbol{b}_2\| = \boldsymbol{1}$$

$$\langle \boldsymbol{b}_1 . \boldsymbol{b}_2 \rangle = 0$$

La matriz ***P*** se denomina *matriz de cambio de base* o de *transformación de coordenadas.*

Como $\boldsymbol{A}$ es matriz simétrica, $\boldsymbol{P}$ es una *matriz ortogonal*. Es por ello que la siguiente transformación se llama *transformación ortogonal de coordenadas:*

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$

Para que esa transformación esté asociada a una *rotación* de los ejes coordenados, se debe cumplir que: $|\boldsymbol{P}| = 1$.

Si $|\boldsymbol{P}| = -1$, se intercambian las columnas de la matriz $\boldsymbol{P}$, obteniendo de esta manera una matriz cuyo determinante es 1 y que tiene por columnas vectores que dirigen nuevos ejes coordenados que están rotados respecto de los ejes iniciales, un mismo ángulo y en el mismo sentido.

. TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL DE COORDENADAS

Sustituyendo la expresión $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$ en la forma matricial de la ecuación cuadrática obtenemos:

$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}')^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}')+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}')+f=0$

Aplicando la propiedad asociativa del producto de matrices, escribimos:

$\boldsymbol{X}'^T(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{X}'+(\boldsymbol{K}\boldsymbol{P})\boldsymbol{X}'+f=0$

Considerando que $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}= \boldsymbol{D}$ y designando $\boldsymbol{K}'= \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}$ resulta:

$\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{K}'\boldsymbol{X}'+f=0$

Expresamos las matrices en términos de sus elementos:

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + [d' \quad e']\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + f = 0$$

Luego:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

5.8.1.2 Teorema de los ejes principales en R^2

Sea $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ la ecuación de una cónica.

Sea $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax^2+2bxy+cy^2$ la *forma cuadrática asociada*.

Entonces, se puede hacer girar los ejes coordenados de modo tal que la ecuación para la cónica C en el nuevo sistema de coordenadas x'- y' tenga la forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

Donde λ_1 y λ_2, son los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$.

La rotación se lleva a cabo por medio de la sustitución $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$, donde $\boldsymbol{P}$ diagonaliza ortogonalmente a $\boldsymbol{A}$ y $|\boldsymbol{P}| = 1$.

5.8.1.3 Clasificación de la cónica

A los efectos de clasificar la cónica en estudio, se procede a analizar el producto de los valores propios de la matriz ***A***, es decir λ_1 y λ_2:

- Si el producto $\lambda_1\lambda_2 > 0$ la cónica es una *elipse*.
- Si el producto $\lambda_1\lambda_2 < 0$ la cónica es una *hipérbola*.
- Si el producto $\lambda_1\lambda_2 = 0$ la cónica es una *parábola.*

Observaciones:

a) Tal como estudiamos en el Capítulo 3 de Secciones Cónicas, luego de completar cuadrados podremos determinar si la ecuación cuadrática original corresponde a una cónica verdadera (elipse, hipérbola, parábola) o a una cónica falsa (punto, par de rectas, conjunto vacío).

b) Siendo ***A*** y ***D*** matrices semejantes, $|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A}|$. Por otra parte, $|\boldsymbol{D}| = \lambda_1\lambda_2$.

Signo de la Forma Cuadrática:

Sea una matriz simétrica ***A*** de orden n.

Sea la forma cuadrática $q:\boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R} / q(X)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, entonces se dice que:

- q es *definida positiva* si $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$ *para todo* $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{X}\neq 0$ (DP)
- q es *definida negativa* si $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0$ *para todo* $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{X}\neq 0$ (DN)
- q es *semidefinida positiva* si $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \geq 0$ *para todo* $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{X}\neq 0$ (SDP)
- q es *semidefinida negativa* si $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \leq 0$ *para todo* $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{X}\neq 0$ (SDN)

Análogamente se define la matriz ***A*** de la forma cuadrática como DP, DN, SDP, o SDN si se cumple a), b), c) o d) respectivamente.

Teorema: Sea $q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, una forma cuadrática.

a) q (o ***A***) es *definida positiva*, si y sólo si todos los valores propios de ***A*** son positivos.

b) q (o ***A***) es *definida negativa*, si y sólo si todos los valores propios de ***A*** son negativos.

c) q (o ***A***) es *semidefinida positiva*, si y sólo si todos los valores propios de ***A*** satisfacen $\lambda_i \geq 0$.

d) q (o ***A***) es *semidefinida negativa*, si y sólo si todos los valores propios de ***A*** satisfacen $\lambda_i \leq 0$.

. PROCEDIMIENTO GENERAL PARA IDENTIFICAR LA CÓNICA Y OBTENER UN NUEVO SISTEMA RESPECTO DEL CUAL LA CÓNICA SE ENCUENTRE EN POSICIÓN NORMAL

- Escriba la ecuación cuadrática en dos variables en forma matricial.
- Encuentre los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.
- Encuentre los espacios característicos, base y dimensión de cada uno.
- Construya una base ortonormal a partir de los vectores propios obtenidos en el punto anterior.
- Arme la matriz $\boldsymbol{P}$ que tiene por columnas los vectores de la base ortonormal obtenida en el punto anterior.
- Verifique que $|\boldsymbol{P}| = 1$
- Efectúe la transformación ortogonal de coordenadas $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$.
- Si es necesario efectúe una traslación de los ejes coordenados.
- Identifique la cónica y represente gráficamente.
- Encuentre el ángulo que han girado los ejes coordenados.

✘ Ejercicio 5.10.

Describa la cónica cuya ecuación es: $2xy + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$
Represente gráficamente.

✘ Respuesta Ejercicio 5.10.

1) Escribimos la ecuación de la cónica en forma matricial: $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}+f=0$

$$[x \quad y]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + [2\sqrt{2} \quad 0]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} - 1 = 0$$

2) Calculamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ 1 & 0-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2-1=0$

Por lo tanto: $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=-1$

Observamos que se verifican las siguientes propiedades:

$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ y $\det(\boldsymbol{A})=\lambda_1\lambda_2$

3) Clasificación de la cónica:

$\lambda_1\lambda_2 < 0$ la cónica es una *hipérbola*.

4) Evaluamos los vectores propios:

Para ello resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=0$, para cada valor propio λ:

Para λ_1=1: $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x=y$

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}y\\ y\end{bmatrix}_{y\neq 0} \quad \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad \|\boldsymbol{v}_1\|=\sqrt{2}$$

Para λ_2=-1: $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x=-y$

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix}_{y\neq 0} \quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad \|\boldsymbol{v}_2\|=\sqrt{2}$$

5) Planteamos la transformación ortogonal de coordenadas:

$\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{PX}'$, donde $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

Tal que det($\boldsymbol{P}$)=1, por lo que ésta transformación está asociada a una rotación de los ejes coordenados un mismo ángulo y en un mismo sentido.

Sustituyendo $\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{PX}'$ en la forma matricial de la ecuación de la cónica, resulta:

$\boldsymbol{X}'^T\,(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP})\,\boldsymbol{X}' + (\boldsymbol{KP})\,\boldsymbol{X}' + f = 0$

$x'^2-y'^2+2x'-2y'-1=0$

$(x'^2+2x')-(y'^2+2y')-1=0$

$(x'^2+2x'+1-1)-(y'^2+2y'+1-1)-1=0$

$(x'+1)^2-(y'+1)^2-1=0$

$x''^2-y''^2=1 \qquad \begin{cases} x''=x'+1\\ y''=y'+1\end{cases} \qquad C(-1,-1)_{x'y'}$

Teniendo en cuenta la expresión para evaluar el ángulo entre dos vectores, $cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$ podemos analizar el ángulo entre los versores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{b}_1$ (o entre los versores $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b}_2$).

De esta manera, el ángulo que rotaron los ejes es:

$$cos\theta = \langle (1,0).\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \boxed{\theta = 45°}$$

Sin embargo, para graficar, representamos los versores $\boldsymbol{b}_1$ y $\boldsymbol{b}_2$ que nos indican las direcciones y sentidos de los nuevos ejes coordenados.

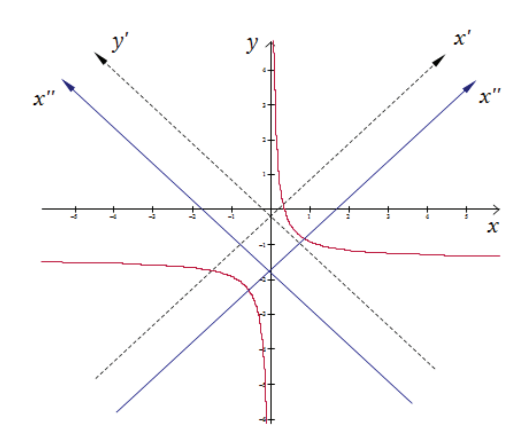


Figura 5.22.

5.8.2 Ecuaciones de segundo grado con tres variables

Una ecuación cuadrática completa en R^3 tiene la forma:

$$\boxed{ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0}$$

en donde los coeficientes *a, b, ..., j* son números reales, y al menos uno de los coeficientes *a, b, c, d, e, f* no es cero. La expresión: $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$ se denomina *forma cuadrática asociada.*

Las *formas cuadráticas* surgen en muchas aplicaciones en economía, mecánica, estadística, geometría, etc.

Observamos de lo estudiado en el apartado 5.6, que ninguna cuádrica en *posición estándar* tiene en su ecuación, términos en $(x\,y)$, $(x\,z)$, $(y\,z)$, $(x^2\,;\,x)$, $(y^2\,;\,y)$ o $(z^2\,;\,z)$.

Dada la ecuación cuadrática en R^3: $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0$

queremos identificar de qué cuádrica se trata. Para ello buscamos un nuevo sistema de coordenadas respecto del cual la *cuádrica* esté en su *posición normal o estándar*.

- Si aparecen términos en $(x^2 - x)$, $(y^2 - y)$, $(z^2 - z)$, indican que la cuádrica está *trasladada* respecto a su posición normal o estándar.
- Si aparecen términos cruzados $(x\,y)$, $(x\,z)$, $(y\,z)$, indican que la cuádrica está *girada* respecto a su posición normal o estándar.

- Si aparecen términos en $(x^2 - x)$, $(y^2 - y)$, $(z^2 - z)$, y también aparecen términos de productos cruzados, la cuádrica está *girada y trasladada* respecto a su posición normal o estándar.

5.8.2.1 Análisis de la ecuación cuadrática

Una técnica para identificar la gráfica de una *superficie cuádrica*, que no se encuentra en la *posición normal o estándar* consiste en: *girar y trasladar los ejes coordenados* para obtener de esa manera un nuevo sistema de coordenadas respecto del cual la *cuádrica* esté en su *posición normal o estándar*.

. TRASLACIÓN

Dada la ecuación cuadrática: $ax^2+by^2+cz^2+gx+hy+iz+j=0$

a) Agrupamos todos los términos en x, todos los términos en y, y todos los términos en z.

b) Hacemos que los coeficientes de los términos en x^2, y^2 y z^2 sean iguales a 1.

c) Completamos cuadrados en cada paréntesis.

✘ Ejercicio 5.11.

Determine la expresión de la *superficie cuádrica* cuya ecuación está dada por: $4x^2+36y^2-9z^2-16x-216y+304=0$, con respecto a un nuevo sistema de coordenadas obtenido por traslación.

✘ Respuesta Ejercicio 5.11.

Dada la ecuación cuadrática en tres variables:

$4x^2+36y^2-9z^2-16x-216y+304=0$

a) Asociamos variables en cada paréntesis de la siguiente manera:

$(4x^2-16x)+(36y^2-216y)-9z^2+304=0$

b) Hacemos que x^2, y^2 y z^2 tengan coeficientes igual a 1.

$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 + 304 = 0$

c) Completamos cuadrados en cada paréntesis:

$4(x^2-4x+4-4)+36(y^2-6y+9-9)-9z^2+304=0$

$4(x-2)^2-16+36(y-3)^2-324-9z^2+304=0$

$4(x-2)^2+36(y-3)^2-9z^2-36=0$

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{1}-\frac{z'^2}{4}=1$$

Se trata de un hiperboloide de una hoja, con eje de la superficie el eje z' (que coincide con el eje z).

. ROTACIÓN

Sea la ecuación cuadrática completa en tres variables *x, y, z*:

$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0$

Escribimos dicha ecuación en forma matricial equivalente, de la siguiente manera:

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \quad h \quad i]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

Designamos:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{K} = [g \quad h \quad i]$$

Entonces la expresión anterior resulta:

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{KX} + j = 0$$

Siendo $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica, $\boldsymbol{A}$ es *ortogonalmente diagonalizable*.

Es decir, existe una matriz $\boldsymbol{P}$ tal que:

$\boldsymbol{P^T AP= D}$

Donde $\boldsymbol{D}$ es una matriz diagonal con los *valores propios* de $\boldsymbol{A}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, como elementos de su diagonal principal:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Las columnas de la matriz $\boldsymbol{P}$ son los *vectores propios normalizados* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, de la matriz $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\|\boldsymbol{b}_1\| = \|\boldsymbol{b}_2\| = \|\boldsymbol{b}_3\| = \mathbf{1}$$

$$\langle \boldsymbol{b}_1 . \boldsymbol{b}_2 \rangle = 0 \; ; \; \langle \boldsymbol{b}_1 . \boldsymbol{b}_3 \rangle = 0 \; ; \; \langle \boldsymbol{b}_2 . \boldsymbol{b}_3 \rangle = 0$$

$\boldsymbol{P}$ es la *matriz de cambio de base* o de *transformación de coordenadas*.

Como $\boldsymbol{A}$ es matriz *simétrica*, $\boldsymbol{P}$ es matriz ortogonal. Es por ello que la siguiente transformación de coordenadas:

$\boldsymbol{X=PX'}$

se llama *transformación ortogonal de coordenadas:*

Para que esa transformación esté asociada a una rotación de los ejes coordenados, se debe cumplir que: $|\boldsymbol{P}| = 1$

Si $|\boldsymbol{P}| = -1$, corresponde intercambiar dos columnas cualesquiera de la matriz ***P***, con lo cual el determinante pasa a ser uno y entonces sí la transformación queda asociada a una rotación de los ejes coordenados.

. TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL DE COORDENADAS

Sustituyendo la expresión ***X=PX´*** en la forma matricial de la ecuación cuadrática obtenemos:

$(\boldsymbol{PX'})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PX'})+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{PX'})+j=0$

$\boldsymbol{X'}^T(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP})\boldsymbol{X'}+(\boldsymbol{KP})\boldsymbol{X'}+j=0$

Considerando que $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}= \boldsymbol{D}$ y designando $\boldsymbol{K'}= \boldsymbol{KP}$ resulta:

$\boldsymbol{X'}^T\boldsymbol{DX'}+\boldsymbol{K'X'}+j=0$

Sustituyendo a continuación, las matrices en términos de sus elementos componentes, queda:

$$[x' \quad y' \quad z']\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [g' \quad h' \quad i']\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + j = 0$$

Evaluamos cada producto matricial indicado y obtenemos:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$$

5.8.2.2 Teorema de los ejes principales en R^3

Sea $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0$ la ecuación de una cuádrica.
Sea $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}= ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$ la *forma cuadrática asociada*.

Entonces, se puede hacer girar los ejes coordenados de modo tal que la ecuación para la cuádrica en el nuevo sistema de coordenadas x'-y'-z' tenga la forma:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+g'x'+h'y'+i'z'+j=0$$

Donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los valores propios de la matriz ***A***.
La rotación se lleva a cabo por medio de la sustitución ***X=PX´***, donde ***P*** diagonaliza ortogonalmente a la matriz ***A*** y $|\boldsymbol{P}| = 1$.

Observaciones:

a) Una vez que determinamos la ecuación $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+g'x'+h'y'+i'z'+j=0$, procedemos a asociar las variables y completar cuadrados, tal como vimos en el caso de sólo traslación. Recién entonces podremos determinar si la ecuación cuadrática original corresponde a una superficie cuádrica con o sin centro, o a una cuádrica falsa o degenerada (un punto, planos, conjunto vacío).

b) Siendo ***A*** y ***D*** matrices semejantes, sus determinantes son iguales. Es decir: $|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A}|$. Por otra parte, $|\boldsymbol{D}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

. PROCEDIMIENTO GENERAL PARA IDENTIFICAR LA CÓNICA Y OBTENER UN NUEVO SISTEMA RESPECTO DEL CUAL LA CÓNICA SE ENCUENTRE EN POSICIÓN NORMAL

- Escriba la ecuación cuadrática en tres variables en forma matricial.
- Encuentre los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.
- Encuentre los espacios característicos, base y dimensión de cada uno de ellos.
- Construya una base ortonormal a partir de los vectores propios obtenidos en el punto anterior.
- Arme la matriz ***P*** que tiene por columnas los vectores de la base ortonormal obtenida en el punto anterior.
- Verifique que $|\boldsymbol{P}| = 1$
- Efectúe la transformación ortogonal de coordenadas ***X=PX´***.
- Si es necesario efectúe una traslación de los ejes coordenados.
- Identifique la superficie cuádrica y represente gráficamente.

5.8.2.3 Clasificación de las superficies cuádricas

En la Tabla 5.3 podemos observar un esquema de clasificación de las superficies cuádricas en relación a los valores propios de la matriz ***A***:

Valores Propios: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Superficie cuádrica
Todos del mismo signo	**Elipsoide**
Dos de un signo y uno de otro signo	**Hiperboloide de una o de dos hojas** o cono elíptico (caso degenerado)
Uno cero y dos del mismo signo	**Paraboloide elíptico** o cilindro elíptico (caso degenerado)
Uno cero y dos de signos opuestos	**Paraboloide hiperbólico** o cilindro hiperbólico (caso degenerado)
Dos cero y uno distinto de cero	**Cilindro parabólico** o dos planos paralelos (caso degenerado)

Tabla 5.3.

Nota histórica:



La primera clasificación de las superficies cuádricas la proporcionó *Leonhard Euler*, en su texto *Introducción al Análisis Infinitesimal* (1748). *Euler* no hizo uso explícito de los valores propios. Dio una fórmula para la rotación de los ejes en R^3 como funciones de ciertos ángulos y después mostró cómo escoger los ángulos para que todos los coeficientes *d, e, f* fueran cero.

Euler fue el matemático más prolífico de todos los tiempos. Sus obras completas ocupan más de 70 grandes volúmenes. Nació en Suiza, pero pasó su vida profesional en San Petersburgo y Berlín. Aunque pasó ciego los últimos 17 años de su vida, continuó produciendo artículos de matemáticas casi hasta el día de su muerte.

✘ Ejercicio 5.12.

Describa la superficie cuádrica cuya ecuación es:

$5x^2+3y^2+3z^2+2xy-2xz-2zy-16x+4y-4z+19=0$

✘ Respuesta Ejercicio 5.12.

Escribimos en primer lugar, la ecuación dada de segundo grado en tres variables en forma matricial. Es decir,

$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{KX}+j=0$

siendo:

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&1&-1\\1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{K}=[-16\quad 4\quad -4];\quad j=19$$

A continuación determinamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Para ello planteamos:

$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=0$

$(3-\lambda)[(3-\lambda(5-\lambda)-3]=0$

$(3-\lambda)[\lambda^2-8\lambda+12]=0$

Por lo tanto, los valores propios resultan:

$\lambda_1=2 \qquad \lambda_2=6 \qquad \lambda_3=3$

Evaluamos los vectores propios, a partir de la resolución del siguiente sistema de

ecuaciones lineales homogéneo:

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=0$$

Para cada valor propio λ se obtiene un conjunto de vectores propios del cual seleccionamos uno en particular y lo normalizamos:

Para $\lambda_1 = 2$: $\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = 6$: $\quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

Para $\lambda_3 = 3$: $\quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Una vez evaluados los tres vectores propios normalizados, los disponemos por columnas para armar la matriz $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Verificamos que el determinante de esta matriz sea igual a uno:

$$|\boldsymbol{P}| = +1$$

Por lo que aseguramos que esta matriz está asociada a una rotación de los ejes coordenados. Por otra parte, podemos verificar que:

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

A continuación planteamos la transformación ortogonal de coordenadas:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$$

Sustituyendo dicha transformación en la ecuación matricial, llegamos a:

$$[x' \quad y' \quad z']\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix} + [-16 \quad 4 \quad -4]\begin{bmatrix}0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix} + 19 = 0$$

Evaluando los productos matriciales indicados, obtenemos:

$$2x'^2 + 6y'^2 + 3z'^2 + 0x' + \frac{24}{\sqrt{6}}y' - \frac{24}{\sqrt{3}}z' + 19 = 0$$

Asociamos las variables:

$$2x'^2 + 6\left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}y'\right) + 3\left(z'^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}z'\right) + 19 = 0$$

Y completamos cuadrados:

$$2x'^2 + 6\left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}y' + \frac{4}{6}\right) + 3\left(z'^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}z' + \frac{16}{3}\right) + 19 - 4 = 0$$

De esta manera obtenemos:

$$2x'^2 + 6\left(y' + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 3\left(z' - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0$$

Finalmente, planteando la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ z'' = z' - \dfrac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Es posible escribir:

$$\boxed{\frac{x''}{\frac{1}{2}} + \frac{y''}{\frac{1}{6}} + \frac{z''}{\frac{1}{3}} = 1} \qquad \textit{Elipsoide} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}};\, b = \frac{1}{\sqrt{6}};\, c = \frac{1}{\sqrt{3}};\, \mathrm{C}\left(0, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)_{x'y'}$$

Reconocemos que se trata de un elipsoide que no es de revolución (ya que los semiejes a, b y c son todos distintos entre sí) e identificamos las coordenadas de su centro.

5.9 ESTUDIO DE UNA SUPERFICIE CURIOSA

A título informativo comentaremos los aspectos principales de una superficie muy particular denominada ***Cinta de Möebius***.

La *cinta de Möebius* o *banda de Möebius*, es una superficie de una sola componente de contorno y de una sola cara. Posee además la particularidad de ser una superficie no orientable. La Figura 5.23 muestra gráficamente dos ejemplos de lo descripto.

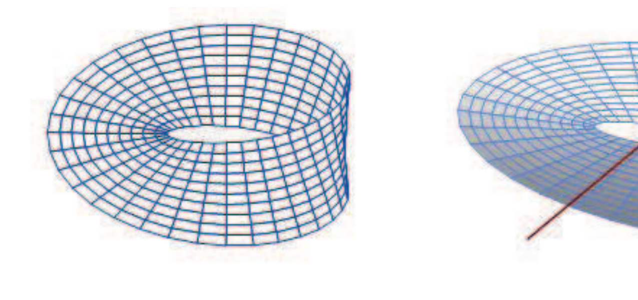


Figura 5.23.

La superficie fue descubierta alrededor del año 1858 y pertenece a la categoría de *superficies regladas*, ya que es posible generar la superficie por el movimiento de una generatriz recta que se desplaza sobre una determinada curva directriz. Las ecuaciones paramétricas que representan esta superficie para los parámetros *u* y *t,* son las siguientes:

$$\begin{cases} x = \cos(u) + t\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) \\ y = t sen\left(\frac{u}{2}\right) \\ z = sen(u) + t\cos\left(\frac{u}{2}\right) sen(u) \qquad u \in [0, 2\pi); \quad -k \leq t \leq k \end{cases}$$

Para el caso de k=0.40 a k=0.50 se obtiene una clara representación de la superficie, la cual se puede observar en la Figura 5.24.

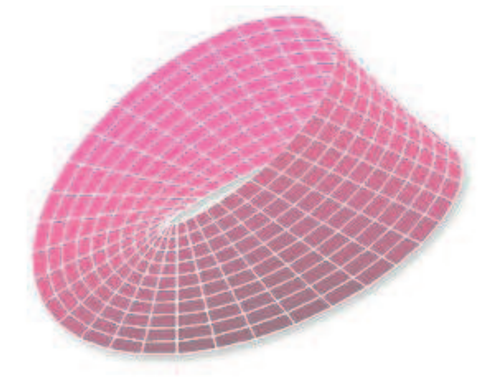


Figura 5.24.

5.10 ACTIVIDADES DE REPASO Y AUTOEVALUACIÓN

- Defina los conceptos de *superficie* y *traza* de una superficie.
- Defina *superficie esférica* e indique sus ecuaciones.
- Defina *superficie cilíndrica* e indique un procedimiento para encontrar su ecuación.
- Defina *superficie cónica* e indique un procedimiento para encontrar su ecuación.
- Defina *superficie de revolución* e indique un procedimiento para encontrar su ecuación.
- Describa gráfica y analíticamente las *superficies cuádricas* con centro.
- Describa gráfica y analíticamente las *superficies cuádricas* sin centro.
- Dada una ecuación cuadrática completa en dos variables, describa un procedimiento que permita estudiar la curva y su representación gráfica.
- Dada una ecuación cuadrática completa en tres variables, describa un procedimiento que permita estudiar la superficie y su representación gráfica.

Apéndice A:

Bibliografía

Anton, H.; "*Introducción al Álgebra Lineal*". Editorial Limusa. Edición 2004.

Castelnuovo, G.; "*Lecciones de Geometría Analítica*". Editorial Mundo Científico. Edición 1943.

Downs, J.W.; "*Practical Conic Sections*". Dover Publications. Edición 2003.

Fuller, G., Tarwater, D.; "*Geometría Analítica*". Addison Wesley Iberoamericana. Edición 1999.

Grossman, S.I., Flores Godoy J.,J.; "*Álgebra Lineal*". Editorial Mc Graw Hill. Edición 2012.

Noble, B.; "*Applied Linear Algebra*". Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs. Edición 1969.

Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., Ramirez, A.; "*Geometría Analítica*" Pearson Educación. Edición 2005.

Santaló, L.; "*Vectores y Tensores con sus Aplicaciones*". Editorial Universidad de Buenos Aires, EUDEBA. Edición 1977.

Strang, G.; "*Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*". International Thomson Editores. Edición 2007.

Sunkel, A.; "*Geometría Analítica en Forma Vectorial y Matricial*". Editorial Nueva Librería. Edición 2005.

Trias Pairó, J.; "*Geometría para la Informática Gráfica y CAD*". Editorial Alfaomega. Edición 2005.

Geometría Analítica
para Ciencias e Ingenierías

EDICIÓN DIGITAL

Silvia Raquel Raichman - Eduardo Totter



Mendoza, República Argentina, Febrero de 2016.